Prova scritta di AM4 del 7/11/2003 – (I Esonero)

- **Per ottenere la sufficienza è necessario svolgere in maniera suffieciente sia la parte I che la parte II.**
- **Motivare il lavoro svolto.**
- **Durante l'esame non è consentito l'uso di appunti, libri, calcolatrici.**

Parte I

1) Calcolare

$$\int_\gamma \frac{y^3 + \sqrt{1-z}}{z^2}\, ds$$

dove $\gamma(t) := (\cos t, \sin t, t)$ con $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$.

2) Calcolare

$$\int \arccos \sqrt[3]{x}\, dx.$$

3) Sia S la superficie parametrizzata da

$$\begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = \sin v - u \cos v \\ z(u,v) = \cos u + u \sin v \end{cases}$$

con $v \in (0, \pi)$ e $u \in (0,1)$. Sia $f(x,y,z) = xy + yz + zx$, calcolare

$$\int_S f\, d\sigma.$$

Parte II

4) Dimostrare che l'immagine di un insieme di misura nulla secondo un'applicazione lipschitziana è di misura nulla. (Enunciare il/i risultato/i in maniera precisa).

5) Si descriva in maniera sintetica la costruzione della curva di Peano includendo, in particolare: 1) la descrizione della partizione "a livello" k della partizione di $[0,1]^2$ in 4^k quadrati $\{Q_j^{(k)}\}$; 2) la definizione delle curve approssimanti φ_k e la dimostrazione che le φ_k convergono uniformemente su $[0,1]$.

6) Si enuncino i risultati relativi a come variano i volumi di rettangoli in $\mathbb{R}^n$ secondo trasformazioni lineari, discutendo, in particolare, la connessione con il determinante.