AM4-Esercitazione 9
A.A.2003-2004

Prof. Luigi Chierchia, Dott. Laura Di Gregorio

27 novembre 2003

Esercizio 1

a) Siano $p, q > 1$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dimostrare che $\forall s, t \geq 0$ si ha $st \leq \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}$.

b) Dimostrare che $\forall a_i, b_i \geq 0$ tali che $\sum_{i=1}^n a_i^p = 1 = \sum_{i=1}^n b_i^q$ si ha $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq 1$ e dedurre la disuguaglianza di Hölder per $x, y \in \mathbb{C}^n$:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq |x|_p |y|_q.$$

c) Dimostrare la disuguaglianza di Minkowski per la norma $|\cdot|_p$:

$$|x+y|_p \leq |x|_p + |y|_p$$

Esercizio 2

Dimostrare che:

a) $\|\cdot\|_p$ è una seminorma su $\mathcal{R}(E)$ con E rettangolo limitato non degenere di $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{R}(E) = \big\{$funzioni integrabili secondo Riemann su E$\big\}$;

b) $\|\cdot\|_p$ è una seminorma su $\mathcal{R}_p(E)$ $\forall p \geq 1$;

c) se f è integrabile secondo Riemann su E, rettangolo di $\mathbb{R}^n$ e $\int_E |f| = 0$ allora $f = 0$ su $E \setminus Q$ con Q di misura nulla;

d) $f \in \mathcal{R}_p(E)$ e $\int_E |f| = 0$ allora $f = 0$ su $E \setminus Q$ con Q di misura nulla.