AM3 - Tutorato IX

SOLUZIONI

mercoledì 5 maggio 2004

Soluzione esercizio 1. Per calcolare l'integrale assegnato è opportuno, come suggerito sia dalla forma della funzione che da quella del dominio di integrazione D, operare il seguente cambio di variabili:

$$\begin{cases} u = x(y+1) \\ v = ye^x \end{cases}$$

Sia allora $\Phi(x,y) = (x(y+1), ye^x) = (u,v)$, Φ è chiaramente differenziabile e dal momento che $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le ye^x \le 2,\ 2 \le x(y+1) \le 3\}$ risulta:

$$A = \Phi(D) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le v \le 2,\ 2 \le u \le 3\} = [2,3] \times [1,2]$$

La matrice Jacobiana della trasformazione è:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} y+1 & x \\ ye^x & e^x \end{pmatrix}.$$

per cui:

$$|\det(J_\Phi)| = |e^x(y+1) - xye^x| = e^x|xy - y - 1|$$

Sia allora $f(u,v) = \frac{v^2}{u^2}$ abbiamo che:

$$\begin{aligned} &\iint_D e^x|xy-1-y|\frac{e^{2x}y^2}{x^2\,(1+y)^2}\,dx\,dy = \\ = \quad &\iint_D |\det(J_\Phi)|\, f\circ\Phi(x,y)\,dx\,dy = \iint_A f(u,v)\,du\,dv \end{aligned}$$

dove abbiamo usato per l' ultima uguaglianza il teorema del cambio di variabili in $\mathbb{R}^n$ (cfr. testo del tutorato VIII). In conclusione calcoliamo il semplice integrale così ottenuto:

$$
\begin{aligned}
\iint_A f(u,v)\,du\,dv &= \iint_{[2,3]\times[1,2]} \frac{v^2}{u^2}\,du\,dv = \\
= \quad & \int_2^3 \left(\int_1^2 \frac{v^2}{u^2}\,dv\right)\,du = \int_2^3 \left[\frac{v^3}{3}\right]_1^2 \frac{du}{u^2} = \\
= \quad & \frac{7}{3}\int_2^3 \frac{du}{u^2} = \frac{7}{3}\left[-\frac{1}{u}\right]_2^3 = \\
= \quad & \frac{7}{3}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{18}
\end{aligned}
$$

Soluzione esercizio 2. Procediamo anche in questo caso operando il cambio di variabile suggerito dalla forma della funzione integranda, ovvero poniamo:

$$
\begin{cases} u = y + x^3 \\ v = y - x^3 \end{cases}
$$

Consideriamo allora la trasformazione $\Phi(x,y) = \big(y + x^3, y - x^3\big)$. Si può facilmente verificare che Φ verifica le ipotesi del teorema del cambio di variabili (differenziabilità , limitatezza ed iniettività nell'interno del dominio d'integrazione). Calcoliamo lo Jacobiano di Φ:

$$
J_\Phi = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 3x^2 & 1 \\ -3x^2 & 1 \end{pmatrix}
$$

per cui:

$$
|\det(J_\Phi)| = 6x^2 \neq 0 \qquad \forall\, x \in T
$$

Adesso cerchiamo di esprimere le variabili x ed y in funzione delle nuove variabili u e v , al fine di individuare qual è il sottinsieme di $\mathbb{R}^2$ che è l'immagine di T tramite Φ. Dalle equazioni $u(x,y) = y + x^3$ e $v(x,y) = y - x^3$ sottraendo prima e sommando in seguito l'una all'altra, otteniamo

$$
\begin{cases} x = \left(\frac{u-v}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ y = \frac{u+v}{2} \end{cases}
$$

Andiamo ora a sostituire alle equazioni che individuano T in funzione di x ed y, le loro rispettive espressioni in u e v

$$
\begin{cases}
x \geq 1 & \Rightarrow & \frac{u-v}{2} \geq 1 & \Rightarrow & u \geq v + 2 \\
y \leq 3 & \Rightarrow & \frac{u+v}{2} \leq 3 & \Rightarrow & u \leq 6 - v \\
x^3 \leq y & \Rightarrow & y - x^3 \geq 0 & \Rightarrow & v \geq 0
\end{cases}
$$

Allora se

$$
B = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 :\ v + 2 \leq u \leq 6 - v,\ v \leq 0\}
$$

risulta $B = \Phi(T)$. Prendendo dunque $f(u,v) = ve^u$ e scrivendo B come insieme normale rispetto all'asse delle u nel seguente modo:

$$\{(u,v) \in \mathbb{R} \times [0,2] :\ v+2 \leq u \leq 6-v\}$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}
&\iint_T x^2 \left(y-x^3\right) \exp\left(y+x^3\right) dx\, dy = \\
= \;& \frac{1}{6} \iint_T |det(J_\Phi)|\; f \circ \Phi(x,y)\, dx\, dy = \frac{1}{6} \iint_B f(u,v)\, du\, dv = \\
= \;& \frac{1}{6} \int_0^2 \left(\int_{v+2}^{6-v} ve^u\, du \right) dv = \frac{1}{6} \int_0^2 v\left(e^{6-v} - e^{v+2}\right) dv = \\
= \;& \frac{1}{6} \left\{ e^6 \int_0^2 ve^{-v} - e^2 \int_0^2 e^v \right\} = \ldots = \frac{1}{6}\left(e^6 - 4e^4 - e^2\right)
\end{aligned}$$

Soluzione esercizio 3. La regione di $\mathbb{R}^3$ limitata dalle superfici aventi equazioni $z=0$, $4z = x^2+y^2$ e $x^2+y^2-2y=0$ può essere scritta come insieme normale rispetto all'asse delle z nel modo seguente:

$$B = \{(x,y,z) \in C \times \mathbb{R} :\ 0 \leq z \leq \frac{x^2+y^2}{4}\}$$

dove $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2-2y \leq 0\}$.

Allora, applicando il metodo degli integrali iterati su insiemi normali, integriamo prima nella variabile z :

$$\begin{aligned}
&\iiint_B x\sqrt{|yz|}\, dx\, dy\, dz = \iint_C \left(\int_0^{\frac{x^2+y^2}{4}} \sqrt{z}\, dz \right) x\sqrt{|y|}\, dx\, dy = \\
= \;& \frac{2}{3} \iint_C x\sqrt{|y|} \left[z^{\frac{3}{2}}\, dz \right]_0^{\frac{x^2+y^2}{4}} dx\, dy = \\
= \;& \frac{1}{12} \iint_C x\sqrt{|y|} \left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} dx\, dy
\end{aligned}$$

Per risolvere quest'integrale di due variabili procediamo, data la conformazione del dominio, operando il passaggio a coordinate polari, ponendo cioè

$$(x,y) = \Phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

Siamo già a conoscenza (cfr. soluzioni del tutorato 8) del fatto che Φ verifica le ipotesi di differenziabilità , di limitatezza e di iniettività richieste dal teorema del cambio di variabile. Inoltre abbiamo già in precedenza calcolato (cfr. sempre soluzioni del tutorato 8) che :

$$|\det(J_\Phi)| = \rho$$

Resta solo da individuare il sottinsieme A di $\mathbb{R}^2$ tale che $\Phi(A) = C$. Sostituiamo allora, analogamente a quanto fatto più volte in precedenza, le espressioni di x ed y in funzione di ρ e θ nelle equazioni che descrivono C, a così da trovare altrettante equazioni (in ρ e θ) che descrivano A.

$$x^2 + y^2 - 2y \leq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \rho^2 - 2\rho\sin\theta \leq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \rho \leq 2\sin\theta$$

Allora, siccome nella rappresentazione in coordinate polari ρ rappresenta la distanza dall'origine, si deve avere $\rho \geq 0$ e dunque in particolare deve essere :

$$\sin\theta \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

e dunque risulta :

$$A = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq \theta \leq \pi, \ \ \rho \leq 2\sin\theta\}$$

Calcoliamo allora per concludere, sfruttando il teorema per l'integrazione su insiemi normali, l'integrale precedentemente ottenuto:

$$\begin{aligned} &\iiint_B x\sqrt{|yz|}\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{12}\iint_C x\sqrt{|y|}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\,dx\,dy = \\ = \quad &\frac{1}{12}\iint_A \rho\cos\theta\sqrt{\rho\sin\theta}\,\rho^4\,d\theta\,d\rho = \\ = \quad &\frac{1}{12}\int_0^\pi\left(\int_0^{2\sin\theta}\rho^{\frac{11}{2}}\,d\rho\right)\cos\theta\sqrt{\sin\theta}\,d\theta = \\ = \quad &\frac{1}{78}\int_0^\pi\left[\rho^{\frac{13}{2}}\right]_0^{2\sin\theta}\cos\theta\sqrt{\sin\theta}\,d\theta = \\ = \quad &\frac{32\sqrt{2}}{39}\int_0^\pi\cos\theta\sin^7\theta\,d\theta = \frac{4\sqrt{2}}{39}\left[\sin^8\theta\right]_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

Soluzione esercizio 4. Per calcolare quest'integrale è opportuno esprimere E in maniera più conveniente rispetto alle coordinate sferiche (come suggeriro nel testo) . Pertanto, posto $(x, y, z) = T(\rho, \theta, \phi) = (\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi)$ abbiamo :

$$J_T = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{pmatrix}$$

e dunque $|\det(J_T)| = \rho^2 \sin\phi$ (si lascia alla discrezione dello studente la facile verifica).

Cerchiamo ora le condizioni sulle nuove variabili per descrivere il sottinsieme S di $\mathbb{R}^3$ che viene mandato in E dall' applicazione T:

$$
\begin{array}{lll}
x^2+y^2 \geq z^2 & \Rightarrow\ \rho^2\sin^2\phi \geq \rho^2\cos^2\phi & \Rightarrow\ \sin^2\phi - \cos^2\phi \geq 0 \\
& \Rightarrow\ \cos 2\phi \leq 0 & \Rightarrow\ \phi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right] \\
x^2+y^2 \leq ax & \Rightarrow\ \rho^2\sin^2\phi \leq a\rho\sin\phi\cos\theta & \Rightarrow \rho\sin\phi \leq a\cos\theta \\
& \Rightarrow \rho \in \left[0, \frac{a\cos\theta}{\sin\phi}\right] & \\
x \geq 0 & \Rightarrow\ \rho\cos\theta\sin\phi \geq 0 & \Rightarrow\ \cos\theta \geq 0 \\
& \Rightarrow\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right] &
\end{array}
$$

Dunque $E = T(S)$ con

$$S = \{(0 \leq \rho \leq \frac{a\cos\theta}{\sin\phi},\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\, oppure\, \frac{3}{2}\pi \leq \theta \leq 2\pi, \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{3}{4}\pi\}$$

Applichiamo allora il teorema del cambio di variabili per calcolare l'integrale assegnato:

$$
\begin{aligned}
&\iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \iiint_S \rho\sin\phi\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi = \\
= \ & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \left(\int_0^{\frac{a\cos\theta}{\sin\phi}} \rho^3\,d\rho\right) \sin^2\phi\,d\phi\right] d\theta\ + \\
+ \ & \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \left(\int_0^{\frac{a\cos\theta}{\sin\phi}} \rho^3\,d\rho\right) \sin^2\phi\,d\phi\right] d\theta\ = \\
= \ & \frac{a^4}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\theta\,d\phi\ + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \cos^4\theta\,d\theta\right) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1}{\sin^2\phi}\,d\phi = \\
= \ & \frac{a^4}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\theta\right) [-\cot\phi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} = \\
= \ & a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\theta = a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta = \\
= \ & \frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right)\,d\theta = \\
= \ & \frac{a^4}{4}\left(\frac{\pi}{2} + [\sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 4\theta}{2}\,d\theta\right) = \cdots = \frac{3}{16}\pi a^4
\end{aligned}
$$