AM3 - Soluzioni del Tutorato VI - Mercoledì 31 marzo 2004 d.C.

1. Abbiamo che non esistono punti nè di massimo nè di minimo assoluti poichè:

   - $\sup_D f(x,y) = +\infty$
     infatti, considerando la successione $a_n := (n,n)$ abbiamo che $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} n^3(2n-1) = +\infty$
   - $\inf_D f(x,y) = -\infty$
     infatti, considerando la successione $b_n := (-n, n+2)$ abbiamo che $\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = \lim_{n\to+\infty} -n(n+2)^2 = -\infty$.

   Passiamo alla ricerca dei punti di massimo o di minimo relativo.
   Osserviamo innanzitutto che lo studio del segno della funzione f, essendo questa espressa mediante il prodotto di tre fattori è molto semplice; abbiamo che $f(x,y) = 0$ sugli assi coordinati e sulla retta di equazione $y = 1 - x$; inoltre la f ha lo stesso segno della x, ovvero è positiva nel primo e quarto quadrante, negativa nel secondo e nel terzo.

   Imponendo che si annulli il gradiente della f otteniamo:
   $\frac{df}{dx} = y^2(2x+y-1) = 0 \Rightarrow y = 0$ oppure $y = 1 - 2x$
   $\frac{df}{dy} = xy(2x+3y-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ oppure $y = 0$ oppure $3y = 2 - 2x$.
   Troviamo così i seguenti punti stazionari :

   - i punti appartenenti all'asse $y = 0$ (con $x \geq 2$ poichè ci restringiamo a D), che sono di minimo relativo per quanto visto nell'analisi preliminare del segno.
   - i punti di coordinate $(0,1)$ e $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, che non appartengono al dominio D e vanno quindi scartati.

   Altri punti di massimo o di minimo relativo potrebbero trovarsi sulla frontiera del dominio; in tal caso, infatti, l'annullarsi del gradiente della f non è più una condizione necessaria.
   Per trovare questi punti dovremmo cercare innanzitutto i massimi e i minimi vincolati, e verificare poi che esiste un intorno del punto in questione contenuto nel dominio D ove sia soddisfatta la condizione data dalla definizione di punto di massimo (o di minimo) relativo.

Tuttavia é immediato notare che, per la trattazione fatta in precedenza riguardo al segno della funzione, i punti del vincolo che appartengono alla retta di equazione $y = 1 - x$ sono di massimo relativo (non stretto) se appartengono al secondo quadrante, di minimo relativo altrimenti (ovvero nel quarto quadrante).
La ricerca dei massimi e minimi sull'arco di circonferenza che costituisce la restante parte del vincolo, ad esempio tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, risulta alquanto difficoltosa e verrà tralasciata.

2. Porremo $n \geq 2$ (il caso $n = 1$ è banale).
É immediato verificare che il minimo della funzione $f(x)$ su D è 0 ; infatti si ha che $f(x) \geq 0 \ \forall x \in D$ e la f si annulla, ad esempio, nel punto $x = (1, 0, \dots, 0)$.
Per trovare i punti di massimo assoluto applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: consideriamo la funzione
$F(x, \lambda) = f(x) - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1 \right).$
Imponendo l'annullamento del gradiente otteniamo il sistema di $n + 1$ equazioni
$$\begin{cases} \frac{d}{dx_j} F(x, \lambda) = j \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i^i}{x_j} - \lambda = 0 \quad \text{per } j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{cases}$$
Esplicitando λ nelle prime n equazioni ed uguagliando le espressioni ottenute avremo
$$\frac{\prod_{i=1}^{n} x_i^i}{x_1} = 2 \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i^i}{x_2} = \dots = n \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i^i}{x_n}$$
da cui
$x_j = j x_1 \forall j = 1, 2, \dots, n.$
Andando a sostituire nell'ultima equazione (equazione del vincolo) otteniamo:
$x_1(1 + 2 + \dots + n) = 1$
ovvero
$x_1 = \frac{2}{n(n+1)}.$
Il punto di massimo è dunque:
$x_{\text{MAX}} = \left(\frac{2}{n(n+1)}, \frac{4}{n(n+1)}, \dots, \frac{2n}{n(n+1)} \right),$
dove la funzione assume il valore

$$f(x)_{\mathrm{MAX}} = \frac{\prod_{i=1}^{n} i^i}{\frac{n(n+1)}{2}^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

3. Occorre formalizzare il problema in modo da ricondursi alla ricerca di un massimo vincolato per qualche funzione . L'idea è di rappresentare tramite la terna (x, y, z) le lunghezze dei lati di un generico triangolo . L'area sarà allora data dalla nota formula dovuta ad Erone :
   $S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$ con $2p = x + y + z$.
   Poichè essa è sempre positiva, possiamo , più semplicemente, ricondurci alla massimizzazione del suo quadrato. Considereremo dunque la funzione
   $f(x, y, z) = \frac{1}{8}(x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(-x + y + z)$
   che , tramite semplici calcoli, possiamo riscrivere come
   $f(x, y, z) = \frac{1}{8}[4x^2y^2 - (x^2 + y^2 - z^2)^2]$.
   Il vincolo su cui studiare la funzione è invece :
   $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x, y, z \geq 0 \, , \, x + y + z - 2p = 0\}$
   dove la prima relazione deriva dal fatto che le variabili x, y, z rappresentano delle lunghezze e la seconda esprime la condizione che il perimetro del triangolo sia fissato uguale a $2p$. Tale vincolo è una porzione di piano contenuta nel sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ a coordinate positive. Notiamo che nei punti appartenenti al bordo del vincolo (che corrispondono a triangoli degeneri) la funzione f (area del triangolo) tende a 0 .

   Applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Sia
   $F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda(x + y + z - 2p)$.
   Imponendo che si annulli il gradiente della F otteniamo le condizioni:
   $$\begin{cases} \frac{d}{d\lambda}F(x, y, z, \lambda) = x + y + z - 2p = 0 \text{ (appartenenza al vincolo)} \\ \frac{d}{dx}F(x, y, z, \lambda) = \frac{1}{2}x(-x^2 + y^2 + z^2) - \lambda = 0 \\ \frac{d}{dy}F(x, y, z, \lambda) = \frac{1}{2}y(x^2 - y^2 + z^2) - \lambda = 0 \\ \frac{d}{dz}F(x, y, z, \lambda) = \frac{1}{2}z(x^2 + y^2 - z^2) - \lambda = 0 \end{cases}$$
   Eliminando la dipendenza da λ nelle ultime tre equazioni , dopo calcoli lunghi e difficoltosi, arriviamo alla soluzione $x = y = z$.

   E' ovviamente molto più semplice lavorare con la formula di Erone già in funzione del perimetro (noto), ovvero restringendo subito la funzione al vincolo. Occorre in tal caso imporre che si annulli il gradiente della funzione

$S(x,y,z) = p(p-x)(p-y)(p-z)$.

Si ottengono così le condizioni :

$\frac{d}{dx}S = -p(p-y)(p-z) = 0$
$\frac{d}{dy}S = -p(p-x)(p-z) = 0$
$\frac{d}{dz}S = -p(p-x)(p-y) = 0$

da cui

$(p-y)(p-z) = (p-x)(p-z) = (p-x)(p-y)$

ovvero $x = y = z$.

4. Applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. L'insieme su cui studiare la f è dato dall' intersezione di due vincoli; consideriamo allora la funzione

   $F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x + 3y - z + \lambda_1(x^2 + y^2 - z) + \lambda_2(z - 2x - 4y)$

   ed imponiamo l'annullarsi del gradiente. Si ottiene:

   $$\begin{cases} \frac{d}{dx}F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 1 + 2\lambda_1 x - 2\lambda_2 = 0 \\ \frac{d}{dy}F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 3 + 2\lambda_1 y - 4\lambda_2 = 0 \\ \frac{d}{dz}F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = -1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \frac{d}{d\lambda_1}F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x^2 + y^2 - z = 0 \\ \frac{d}{d\lambda_2}F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 2x + 4y - z = 0 \end{cases}$$

   Dalla terza equazione ricaviamo

   $\lambda_2 = 1 + \lambda_1$,

   e quindi dalle prime due

   $x = \frac{1+2\lambda_1}{2\lambda_1}$
   $y = \frac{1+4\lambda_1}{2\lambda_1}$.

   Sottraendo la quinta equazione dalla quarta si ottiene

   $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$

   e sostituendo x ed y con i valori in funzione di λ_1

   $(1+2\lambda_1)^2 4\lambda_1^2 + \frac{(1+4\lambda_1)^2}{4\lambda_1^2} - 2\frac{1+2\lambda_1}{2\lambda_1} - 4\frac{1+4\lambda_1}{2\lambda_1} = 0$

   ovvero

   $(1+2\lambda_1)^2 + (1+4\lambda_1)^2 - (4\lambda_1)(1+2\lambda_1) - (8\lambda_1)(1+4\lambda_1) =$
   $= (1+2\lambda_1)(1-2\lambda_1) + (1+4\lambda_1)(1-4\lambda_1) = 2 - 20\lambda_1^2 = 0.$

   Abbiamo dunque

   $\lambda_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$

a cui corrispondono i punti rispettivamente di massimo e minimo vincolati :
$x_{\text{MAX}} = \left(1 - \sqrt{\frac{5}{2}}\,,\, 2 - \sqrt{\frac{5}{2}}\,,\, 10 - 6\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$
$x_{\text{MIN}} = \left(1 + \sqrt{\frac{5}{2}}\,,\, 2 + \sqrt{\frac{5}{2}}\,,\, 10 + 6\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.