AM3 - Soluzioni del Tutorato IV - Mercoledì 17 marzo 2004 d.C.

1. Consideriamo l'equazione omogenea associata $x\ddot{y} + \dot{y} = 0$.
   Tramite la variabile ausiliaria $p = \dot{y}$ ci riconduciamo all'equazione lineare di primo grado a variabili separabili
   $x\dot{p} + p = 0$,
   da cui otteniamo $p = \frac{K}{x}$, ovvero, integrando ulteriormente,
   $y_0 = K_1 \ln x + K_2$.

   Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione data applicando il metodo di variazione delle costanti:
   sia $y^* = c_1(x) \ln x + c_2(x)$ una soluzione, dove $c_1(x)$ e $c_2(x)$ sono funzioni da determinare ;
   imponendo che sia soddisfatta la condizione aggiuntiva
   $c_1'(x) \ln x + c_2'(x) = 0$,
   otteniamo :
   $\dot{y^*} = \frac{c_1(x)}{x} + c_1'(x) \ln x + c_2'(x) = \frac{c_1(x)}{x}$
   $\ddot{y^*} = \frac{c_1'(x)x - c_1(x)}{x^2}$
   da cui, imponendo che y^* sia soluzione dell'equazione differenziale data

   $$\begin{cases} \frac{c_1'(x)x - c_1(x)}{x} + \frac{c_1(x)}{x} = x^2 \Rightarrow c_1'(x) = x^2 \\ c_1'(x) \ln x + c_2'(x) = 0 \Rightarrow c_2'(x) = -x^2 \ln x \end{cases}$$

   Integrando, si ha:
   $c_1(t) = \frac{x^3}{3}$
   $c_2(t) = -\frac{x^3}{3} \ln x + \frac{x^3}{9}$.

   La soluzione generale è dunque :
   $y = y_0 + y^* = K_1 \ln x + K_2 + \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{3} \ln x + \frac{x^3}{9} = \frac{x^3}{9} + H \ln x + J$.

2. Risolvendo l'equazione omogenea associata
   $\dot{y} - y \tan x = 0$
   otteniamo, tramite la separazione di variabili
   $y_0 = \frac{K}{\cos x}$.

Applichiamo ora il metodo di variazione della costante imponendo che
$y^* = \frac{c(x)}{\cos x}$
sia soluzione dell'equazione data. Abbiamo
$\dot{y}_* = \frac{c'(x)}{\cos x} + \frac{c(x)\sin x}{\cos^2 x}$
da cui
$\frac{c'(x)}{\cos x} + \frac{c(x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{c(x)\tan x}{\cos x} + \cos x$
ovvero

$c'(x) = \cos^2 x$.

Integrando, otteniamo

$c(x) = \int \cos^2 x\, dx = \int \cos x(\sin x)'\, dx = \cos x \sin x + \int \sin^2 x\, dx =$

$= \cos x \sin x + \int (1 - \cos^2 x)\, dx = \cos x \sin x + x + J - c(x)$,

cioè

$c(x) = \frac{1}{2}(x + \cos x \sin x + J)$.

La soluzione è quindi

$y = y_0 + y^* = \frac{x+J}{2\cos x} + \frac{1}{2}\sin x$.

3. L'equazione differenziale omogenea del primo ordine
   $\dot{y} + \frac{y}{x} = -xy^2$
   non è risolubile per separazioni di variabili .

   Come da suggerimento, consideriamo l'equazione lineare
   $\dot{y_0} + \frac{y_0}{x} = 0$ (ottenuta trascurando la parte non lineare) .

   Ora possiamo separare le variabili ed ottenere la soluzione
   $y_0 = \frac{K}{x}$.

   Applichiamo a tale funzione il metodo di variazione della costante :
   sia $y = \frac{c(x)}{x}$ soluzione di $\dot{y} + \frac{y}{x} = -xy^2$.
   Avremo:
   $\frac{c'(x)x - c(x)}{x^2} + \frac{c(x)}{x^2} = -\frac{c(x)^2}{x} \Rightarrow c'(x) + c(x)^2 = 0 \Rightarrow c(x) = \frac{1}{x} + J.$
   Abbiamo dunque trovato la soluzione:
   $y = \frac{1}{x^2} + \frac{J}{x}$.

4. Un'equazione differenziale del primo ordine della forma
   $\dot{y} + f(x)y = g(x)y^n$
   è detta equazione di Bernoulli.
   (si noti che i casi n=0 , n=1 sono banali).

   Per risolverla occorre considerare l'equazione lineare
   $\dot{y_0} + f(x)y_0 = 0$
   che, risolta per separazione di variabili, dá :
   $y_0 = Ke^{-F(x)}$
   dove $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$.

   Applichiamo ora il metodo di variazione della costante:
   cerchiamo una soluzione per l'equazione di Bernoulli della forma
   $y^* = c(x)e^{-F(x)}$.
   Avremo:
   $\dot{y} + f(x)y = g(x)y^n \Rightarrow$
   $\Rightarrow c'(x)e^{-F(x)} - c(x)f(x)e^{-F(x)} + c(x)f(x)e^{-F(x)} = g(x)c(x)^n e^{-nF(x)} \Rightarrow$
   $\Rightarrow c'(x)e^{-F(x)} = g(x)c(x)^n e^{-nF(x)}$
   da cui, separando le variabili
   $\frac{c'(x)}{c(x)^n} = g(x)e^{(1-n)F(x)}$
   ed integrando
   $$c(x) = \left[-\frac{1}{(n+1)\int g(x)e^{(1-n)F(x)}\,dx} \right]^{\frac{1}{n+1}} .$$