AM3 - Soluzioni del Tutorato III - Mercoledì 10 marzo 2004 d.C.

1. (a) Consideriamo l'equazione differenziale omogenea associata
   $\dot{x} + 3x = 0$.
   Passando al polinomio caratteristico $\quad \lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -3$,
   otteniamo la soluzione generale
   $x_0 = Ke^{-3t}$.

   Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione data utilizzando il metodo di variazione delle costanti:

   sia $x^* = K(t)e^{-3t}$ una soluzione, dove $K(t)$ è un'opportuna funzione da determinare : abbiamo
   $\dot{x^*} = K'(t)e^{-3t} - 3Ke{-}3t$,
   da cui, imponendo che x^* soddisfi l'equazione differenziale data:
   $\dot{x^*} + 3x^* = K'(t)e^{-3t} - 3K(t)e{-}3t + 3K(t)e^{-3t} = K'(t)e^{-3t} = 5 \Rightarrow$
   $\Rightarrow K'(t) = 5e^{3t} \Rightarrow K(t) = \frac{5}{3}e^{3t} + H.$

   La soluzione generale richiesta è dunque:

   $x = x_0 + x^* = Ke^{-3t} + \frac{5}{3}e^{3t}e^{-3t} = Ke^{-3t} + \frac{5}{3}$.

   (b) Effettuando il cambio di variabile indicato nel suggerimento ci riconduciamo all'equazione differenziale a variabili separabili:

   $\dot{y} = (\sqrt{y} - 2y)\frac{1}{t} \quad .$

   Abbiamo (per $y \neq 0 \, , y \neq \frac{1}{4}$):

   $\dfrac{\dot{y}}{\sqrt{y} - 2y} = \dfrac{1}{t} \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{dy}{\sqrt{y} - 2y} = \int \dfrac{1}{t}\, dt$ da cui, sostituendo $y = v^2$,

   $\displaystyle\int \frac{2dv}{1 - 2v} = \ln|t| \Rightarrow -\ln|1 - 2v| = \ln|t| + K \Rightarrow$

   $\Rightarrow |1 - 2\sqrt{y}| = \dfrac{J}{|t|} \Rightarrow y = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{J}{2|t|}\right)^2 \; J \geq 0 \Rightarrow$

   $\Rightarrow x = t\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{J}{2|t|}\right)^2 \; J \geq 0$.

(c) Consideriamo il polinomio caratteristico dell'equazione lineare omogenea del quarto ordine data.

$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 4\lambda + 4)(\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2\ ,\ \lambda_3 = i\ ,\ \lambda_4 = -i.$

La soluzione generale è quindi lo spazio vettoriale di dimensione quattro una cui base è :
$\{ e^{2t}\ , te^{2t}\ , eit\ , e^{-it} \}$, o anche, in termini di sole funzioni reali
$\{ e^{2t}\ , te^{2t}\ , \sin t\ , \cos t \}$, da cui

$x = K_1 e^{2t} + K_2 t e^{2t} + K_3 \sin t + K_4 \cos t.$

(d) La soluzione dell'equazione omogenea associata è
$x_0 = K_1 e^t + K_2 e^{-t}$, infatti il polinomio caratteristico $\lambda^2 - 1$ ha radici $\lambda_1 = 1\ ,\ \lambda_2 = -1.$

Come da suggerimento, cerchiamo una soluzione della forma
$x^* = c_1(t)e^t + c_2(t)e^{-t}.$
Avremo
$\dot{x^*} = c_1 e^t + c_1' e^t - c_2 e^{-t} + c_2'(t)e^{-t} = c_1 e^t - c_2 e^{-t},$
dove si è imposta la condizione aggiuntiva
$c_1' e^t + c_2'(t)e^{-t} = 0;$

$\ddot{x^*} = c_1 e^t + c_1' e^t + c_2 e^{-t} - c_2'(t)e^{-t}$, quindi
$\ddot{x^*} - x^* = \frac{1}{1+e^t} \Rightarrow c_1' e^t - c_2'(t)e^{-t} = \frac{1}{1+e^t}$.

Consideriamo ora congiuntamente le due condizioni
$$\begin{cases} c_1' e^t - c_2'(t)e^{-t} = \frac{1}{1+e^t} \\ c_1' e^t + c_2'(t)e^{-t} = 0 \end{cases}$$
sommando e sottraendo membro a membro, otteniamo:

$c_1'(t) = \frac{1}{2}\frac{e^{-t}}{1+e^t}$
$c_2'(t) = -\frac{1}{2}\frac{e^t}{1+e^t}$
da cui, integrando, si ha:
$c_1(t) = \frac{1}{2}(\ln(e^{-t} + 1) - e^{-t})$
$c_2(t) = -\frac{1}{2}\ln(1 + e^t)$.

Abbiamo così trovato la soluzione generale:

$x = x_0 + x^* = K_1 e^t + K_2 e^{-t} + \frac{1}{2}\ln(e^{-t} + 1)e^t - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(1 + e^t)$.

2. La soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} + 3x = 5$
è stata trovata nel primo punto dell'esercizio precedente.
Imponendo in essa una condizione iniziale determiniamo il valore della costante K trovando un'unica soluzione.

   (a) $x(0) = 1 \Rightarrow K + \frac{5}{3} = 1 \Rightarrow K = -\frac{2}{3}$.

   (b) $x(2) = -5 \Rightarrow Ke^{-6} + \frac{5}{3} = -5 \Rightarrow K = -\frac{20}{3}e^{6}$.

   (c) $x(-1) = \sqrt{2} \Rightarrow Ke^{3} + \frac{5}{3} = \sqrt{2} \Rightarrow K = \left(\sqrt{2} - \frac{5}{3}\right) e^{-3}$.