Prova scritta di AM3 dell'8/9/2004
Appello X

1. Motivare il lavoro svolto. Durante l'esame non è consentito l'uso di appunti, libri, calcolatrici.
2.**Indicare sull'elaborato: nome e cognome, n. matricola.**
3. Per superare l'esame è **necessario** svolgere l'esercizio 3.

1) (i) Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$y' = \frac{x+y}{x+4y} \ , \qquad y(0) = 1 \ .$$

2) (i) Calcolare il massimo della funzione $f = xyz$ per

$$(x,y,z) \in \Big\{ x \geq 0 \ , y \geq 0 \ , z \geq 0 \ : x+y+z = a \Big\} \ .$$

(ii) Dimostrare che per ogni x, y e z non negativi si ha

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} \ .$$

3) (i) Calcolare la lunghezza della curva $y^2 = x^3$ tra i punti $(0,0)$ e $(4,8)$.
(ii) Calcolare l'area della superficie

$$\Big\{ z = y + \log x \ : \quad x \in [1,2] \quad y \in [1,2] \Big\} \ .$$

4) Si consideri la funzione $f(x) = \Big(x_2 + \operatorname{sen}(x_1 + x_2^2) \ , \ \log(1 + x_1 + x_1^2 x_2) \Big)$ in un intorno dell'origine di $\mathbb{R}^2$. Si dica se la funzione f è invertibile in un intorno dell'origine ed in caso affermativo si calcoli la matrice jacobiana della funzione inversa nel punto $f(0,0)$.

5) Dare la definizione di integrale di una 1–forma , $\int_{\Gamma^+} \omega$. Spiegare e dimostrare l'identità

$$\int_{\Gamma^-} \omega = - \int_{\Gamma^+} \omega \ .$$

6) Dare condizioni su $f(x,t)$ affinché il problema

$$\dot{x} = f(x,t) \ , \qquad x(0) = 0 \ ,$$

ammetta un'unica soluzione $t \in \mathbb{R} \to x(t)$. Dimostrare l'affermazione fatta.