Indice

Capitolo 4

L'integrale di Riemann in $\mathbb{R}^n$

4.1 Definizioni

4.1.1 Si ricorda che un **intervallo** di $\mathbb{R}$ è un sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}$ ossia un sottoinsieme $I \subseteq \mathbb{R}$ tale che se $x, y \in I$ allora $(1-t)x + ty \in I$ per ogni $0 \le t \le 1$; se un intervallo è limitato superiormente (inferiormente) chiameremo $\sup I$ ($\inf I$) il suo estremo destro (sinistro). Se un intervallo I è limitato e $a < b$ sono i suoi estremi, chiamiamo lunghezza o misura di I il numero non negatovo $(b-a)$.

In generale, un **rettangolo** in $\mathbb{R}^n$ è il prodotto cartesiano di n intervalli. Esempi di rettangoli in $\mathbb{R}^2$ sono:

$$
\begin{aligned}
&[0,1]^2 := [0,1] \times [0,1] := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1\} \ ; \\
&[-\pi, \pi) \times (-1, +\infty) := \{x \in \mathbb{R}^2 : -\pi \le x_1 < \pi, x_2 > -1\} \ ; \\
&[0,1] \times \{3\} := \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_1 \le 1, x_2 = 3\} \ .
\end{aligned}
$$

L'ultimo esempio è "degenere" nel senso che uno dei "lati" del rettangolo è formato dal solo punto $\{3\} = [3,3]$. Normalmente consideremo *rettangoli chiusi, limitati e non degeneri*, ovvero insiemi della forma

$$
E := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \ , \qquad \text{con} \quad -\infty < a_i < b_i < \infty \ ; \tag{4.1}
$$

per brevità, in questo capitolo, chiameremo tali insiemi **rettangoli standard**. Se $n \ge 2$, il termine *faccia* del rettangolo $E = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, sta ad indicare uno dei $2n$ rettangoli $(n-1)$–dimensionali che formano la frontiera di E: per ogni j tra 1 ed n vi sono due facce opposte date da

$$
\begin{aligned}
&\{a_j\} \times \prod_{i \ne j} [a_i, b_i] := \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = a_j, \ a_i \le x_i \le b_i \ , \forall i \ne j\} \ \text{, e da} \\
&\{b_j\} \times \prod_{i \ne j} [a_i, b_i] := \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = b_j, \ a_i \le x_i \le b_i \ , \forall i \ne j\} \ .
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

4.1.2 Dato un rettangolo limitato qualunque $E = I_1 \times \cdots \times I_n \subseteq \mathbb{R}^n$ definiamo la **misura di** E (o, più precisamente, la *misura* n*–dimensionale di* E) come il prodotto delle lunghezze degli intervalli unidimensionali I_i; cioè se gli estremi di I_i sono $a_i \le b_i$, definiamo la misura di E come

$$
\mathrm{mis_n}\, E := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) \ ; \tag{4.3}
$$

normalmente, quando non vi sia ambiguità, ometteremo l'indice n dal simbolo mis_n, e denoteremo semplicemente $\mathrm{mis}\, E$ la misura n–dimensionale del rettangolo n–dimensionale E. Si noti che la misura di $E = I_1 \times \cdots \times I_n$ non dipende dal fatto che gli intervalli I_i siano aperti o chiusi a sinistra o destra; inoltre non abbiamo escluso, in tale definizione, i rettangoli degeneri, i quali, secondo (4.3), *hanno misura uguale a* 0. In particolare le facce di un rettangolo n–dimensionale, e cioè uno degli insiemi descritti in (4.2), hanno misura n–dimensionale nulla. Si noti anche che l'insieme vuoto è un particolare rettangolo (aperto e con tutti i lati degeneri $a_i = b_i$ per ogni i) dunque, per definizione, *la misura dell'insieme vuoto è uguale a* 0.

4.1.3 Sia E un rettangolo standard in $\mathbb{R}^n$. Una **partizione** di E è una n–nupla $P := (P_1, ..., P_n)$ dove ogni P_i è una collezione finita di punti distinti di $[a_i, b_i]$ che contenga gli estremi a_i e b_i; cioè

$$P = (P_1, ..., P_n) \quad \text{con} \quad P_i = \{\xi_0^{(i)} = a_i < \xi_1^{(i)} < \cdots < \xi_{N_i}^{(i)} := b_i\} \; ; \tag{4.4}$$

con $N_i \geq 1$.

4.1.4 I **rettangoli di una partizione** $P = (P_1, ..., P_n)$ di un rettangolo standard $E \subseteq \mathbb{R}^n$ sono i rettangoli chiusi prodotto cartesiano di intervalli i cui estremi sono due punti consecutivi di P_i; in altre parole, se P è come in (4.4), i rettangoli di P sono gli $N_1 \cdot N_2 \cdots N_n$ rettangoli standard della forma

$$R_j := R_{(j_1,...,j_n)} := [\xi_{j_1-1}^{(1)}, \xi_{j_1}^{(1)}] \times \cdots \times [\xi_{j_n-1}^{(n)}, \xi_{j_n}^{(n)}] \tag{4.5}$$

dove j_i è un numero intero compreso tra 1 e N_i. L'insieme dei rettangoli di una partizione P del rettangolo E verrà denotato con il simbolo $\mathscr{R}(P)$.

Dimostriamo ora che, come ci si aspetta, data una qualunque partizione P di E si ha

$$\sum_{R \in \mathscr{R}(P)} \mathrm{mis}\, R = \mathrm{mis}\, E \; . \tag{4.6}$$

Infatti, considerando per semplicità il caso $n = 2$, se $P = (P_1, P_2)$ con P_i come in (4.4), si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{R \in \mathscr{R}(P)} \mathrm{mis}\, R &= \sum_{j=(j_1,j_2)} \mathrm{mis}\, R_j \\
&= \sum_{j_1,j_2} (\xi_{j_1}^{(1)} - \xi_{j_1-1}^{(1)})(\xi_{j_2}^{(2)} - \xi_{j_2-1}^{(2)}) \\
&= \Big(\sum_{j_1} (\xi_{j_1}^{(1)} - \xi_{j_1-1}^{(1)})\Big) \Big(\sum_{j_2} (\xi_{j_2}^{(2)} - \xi_{j_2-1}^{(2)})\Big) \\
&= (\xi_{N_1}^{(1)} - \xi_0^{(1)})(\xi_{N_2}^{(2)} - \xi_0^{(2)}) \\
&= (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \\
&=: \mathrm{mis}\, R \; ,
\end{aligned}$$

essendo le somme unidimensionali somme "telescopiche". ∎

Si ricorda che dato un qualunque insieme non vuoto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si definisce il "diametro di A (rispetto alla norma euclidea)" la quantità[1]

$$\mathrm{diam}\, A := \sup_{x,y \in A} |x - y| \; . \tag{4.7}$$

[1] Qui, come al solito, $|\cdot|$ denota la norma euclidea.

Se P è una partizione di E chiamiamo **diametro di** P la quantità

$$\mathrm{diam}\, P := \sup_{R\in\mathscr{R}(P)} \mathrm{diam}\, R \ . \tag{4.8}$$

4.1.5 Se $P = (P_1, ..., P_n)$ e $P' = (P'_1, ..., P'_n)$ sono partizioni di E, diremo che $P \subseteq P'$ se , per ogni i, $P_i \subseteq P'_i$; in tal caso, diremo che P' è un **raffinamento** di P.
Chiaramente, *se P' è un raffinamento di P, ogni rettangolo R' di P' è interamente contenuto in un rettangolo R di P e ogni rettangolo R di P è dato dall'unione di tutti i rettangoli di P' contenuti in R.*
Date due partizioni di E, $P' = (P'_1, ..., P'_n)$ e $P'' = (P''_1, ..., P''_n)$, definiamo la **partizione unione** di P' e P'', $P := P' \cup P''$, la partizione $P := (P_1, ..., P_n)$ con P_i formato dall'unione di tutti i punti di P'_i e P''_i. In particolare,

$$P' \subseteq P' \cup P'' \ , \qquad P'' \subseteq P' \cup P'' \tag{4.9}$$

qualunque siano le partizioni P' e P''.

4.1.6 Sia E un rettangolo standard di $\mathbb{R}^n$. Un insieme $R \subseteq E$ si dice **elementare** se è l'unione finita di rettangoli $R_i \subseteq E$ chiusi tali che $\mathring{R}_i \cap \mathring{R}_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$. Chiaramente se P è una partizione di E l'unione di una qualunque sottofamiglia di rettangoli di $\mathscr{R}(P)$ è un insieme elementare.

4.1.7 Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard e sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione limitata (cioè $\sup_E |f| < \infty$). Data un partizione P di E si definiscono **somma inferiore** e **somma superiore** di f su E rispetto a P i numeri

$$\begin{aligned}\underline{S}_E(f,P) &:= \sum_{R\in\mathscr{R}(P)} \big(\inf_{x\in R} f(x)\big)\ \mathrm{mis}\, R \ ,\\ \overline{S}_E(f,P) &:= \sum_{R\in\mathscr{R}(P)} \big(\sup_{x\in R} f(x)\big)\ \mathrm{mis}\, R \ .\end{aligned} \tag{4.10}$$

Dalle definizioni date segue che se $P \subseteq P'$

$$-\infty < \mathrm{mis}\, E \inf_E f \le \underline{S}_E(f,P) \le \underline{S}_E(f,P') \le \overline{S}_E(f,P') \le \overline{S}_E(f,P) \le \mathrm{mis}\, E \sup_E f < \infty \ . \tag{4.11}$$

Si definiscono, rispettivamente, **integrale inferiore e integrale superiore di Riemann** di f su E le quantità

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}_E(f) &:= \sup_{\{P\}} \underline{S}_E(f,P) \ ,\\ \overline{\sigma}_E(f) &:= \inf_{\{P\}} \overline{S}_E(f,P)\end{aligned} \tag{4.12}$$

dove, come sopra, l'estremo superiore è preso su tutte le partizioni di E. Chiaramente[2]

$$-\infty < \sup_{\{P\}} \underline{S}_E(f,P) \le \inf_{\{P\}} \overline{S}_E(f,P) < \infty \ . \tag{4.13}$$

[2] Si osservi che se P e P' sono due partizioni di E allora $\underline{S}_E(f,P) \le \underline{S}_E(f, P\cup P') \le \overline{S}_E(f, P\cup P') \le \overline{S}_E(f,P')$, ovvero "le classi dei numeri delle somme inferiori e superiori sono separate".

Si dice che la funzione f è **integrabile (secondo Riemann)** su E se in (4.13) vale il segno di uguaglianza e chiameremo, in tal caso, **l'integrale di Riemann** di f su E tale numero:

$$\int_E f := \underline{\sigma}_E(f) = \overline{\sigma}_E(f)) \ . \tag{4.14}$$

Si usano anche le seguenti notazioni equivalenti

$$\int_E f := \int_E f(x)dx := \int_E f(x)dx_1 \cdots dx_n := \int_E f(y)dy_1 \cdots dy_n \ .$$

4.1.8 Data una partizione P di E, chiamiamo un **ricoprimento disgiunto di** E (o più brevemente, un ricoprimento di E) una famiglia di rettangoli a due a due disgiunti $\widehat{\mathscr{R}}(P)$ tali che

$$R \in \widehat{\mathscr{R}}(P) \implies \begin{cases} \overline{R} \in \mathscr{R}(P) \\ \displaystyle\bigcup_{R \in \widehat{\mathscr{R}}(P)} R = E \ . \end{cases} \tag{4.15}$$

Ad ogni partizione (4.4) si può associare un ricoprimento standard di E, $\widehat{\mathscr{R}}(P) = \{R_j\}$ ponendo

$$R_j = [\xi^{(1)}_{j_1-1}, \xi^{(1)}_{j_1}) \times \cdots \times [\xi^{(n)}_{j_n-1}, \xi^{(n)}_{j_n}) \tag{4.16}$$

se $j_i < N_i$ per ogni i, e se $j_i = N_i$ per qualche i, l'intervallo $[\xi^{(i)}_{j_i-1}, \xi^{(i)}_{j_i})$ in (4.16) viene sostituito con $[\xi^{(i)}_{N_i-1}, \xi^{(i)}_{N_i}]$.
Una **funzione a scalini** $s : E \to \mathbb{R}$ è una funzione della forma

$$s(x) = \sum_{R \in \widehat{\mathscr{R}}(P)} c_R \chi_R(x) \tag{4.17}$$

dove $\widehat{\mathscr{R}}(P)$ è un ricoprimento di E, c_R sono numeri reali e χ_R denota la funzione caratteristica[3] di R.

4.1.9 Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard, P una partizione di E e $B \subseteq E$. Denotiamo con $\mathscr{R}_B(P)$ e $\mathscr{R}'_B(P)$ i seguenti insiemi di rettangoli di $\mathscr{R}(P)$:

$$\begin{aligned} \mathscr{R}_B(P) &:= \{R \in \mathscr{R}(P) : \ R \cap B \neq \emptyset\} \ , \\ \mathscr{R}'_B(P) &:= \{R \in \mathscr{R}(P) : \ R \subseteq B\} \ . \end{aligned} \tag{4.18}$$

Sia P' un raffinamento di P. Ricordando che ogni rettangolo R di $\mathcal{R}(P)$ è dato dall'unione dei rettangoli di $\mathcal{R}(P')$ contenuti in R si ha che

$$\begin{aligned} \sum_{R \in \mathscr{R}'_B(P)} \operatorname{mis} R &\leq \sum_{R \in \mathscr{R}'_B(P')} \operatorname{mis} R \ , \\ \sum_{R \in \mathscr{R}_B(P')} \operatorname{mis} R &\leq \sum_{R \in \mathscr{R}_B(P)} \operatorname{mis} R \ . \end{aligned} \tag{4.19}$$

[3] Si ricorda che, se B è un qualunque insieme, χ_B denota la funzione caratteristica (o indicatrice) di B ovvero la funzione che vale 1 su ogni punto di B e zero altrimenti.

Da tali relazioni segue subito che, se P e P' sono due partizioni arbitrarie di E,

$$\sum_{R\in\mathscr{R}'_B(P)} \operatorname{mis} R \le \sum_{R\in\mathscr{R}'_B(P\cup P')} \operatorname{mis} R \le \sum_{R\in\mathscr{R}_B(P\cup P')} \operatorname{mis} R \le \sum_{R\in\mathscr{R}_B(P')} \operatorname{mis} R\ . \tag{4.20}$$

Si definiscono, rispettivamente, la **misura interna** e la **misura esterna** (secondo Peano–Jordan) di B le quantità

$$\operatorname{mis\,int} B := \sup_{\{P\}} \sum_{R\in\mathscr{R}'_B(P)} \operatorname{mis} R\ , \quad \operatorname{mis\,est} B := \inf_{\{P\}} \sum_{R\in\mathscr{R}_B(P)} \operatorname{mis} R\ , \tag{4.21}$$

dove gli estremi inferiori e superiori sono presi su tutte le partizioni P di E. Da (4.20), segue che

$$0 \le \operatorname{mis\,int} B \le \operatorname{mis\,est} B \le \operatorname{mis} E\ . \tag{4.22}$$

L'insieme B si dice **misurabile** secondo Peano–Jordan se $\operatorname{mis\,int} B = \operatorname{mis\,est} B$ e tale comune valore viene chiamato la **misura di Peano–Jordan** di B e si denota con $\operatorname{mis}_{\rm n} B$ o $\operatorname{mis} B$.

4.1.10 Sia $B \subseteq E$ un insieme misurabile e $f : B \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Definiamo la funzione f_B come la funzione che coincide con f su B e vale 0 fuori di B. Diremo che f **è integrabile su** B se la funzione f_B è integrabile su E e *definiamo* l'integrale di f su B come l'integrale di f_B su E:

$$\int_B f dx := \int_E f_B dx\ .$$

Data una partizione P di E chiameremo una **scelta di punti** di B associati alla partizione P un insieme della forma $Q := \{x_R : R \in \mathscr{R}(P)\}$ dove, per ogni $R \in \mathscr{R}(P)$, x_R è un punto di $R \cap B$. Data una partizione P ed una scelta di punti Q di B, si definisce la **somma parziale di Riemann** di f su B relativa a P e Q il numero

$$S_B(f,P,Q) := \sum_{R\in\mathscr{R}'_B(P)} f(x_R) \operatorname{mis} R\ . \tag{4.23}$$

4.1.11 La teoria dell'integrazione di Riemann è intimamente connessa alla nozione di continuità. Vedremo in seguito, infatti, che *le funzioni integrabili secondo Riemann coincidono con le funzioni che non hanno "troppi" punti di discontinuità.* Metteremo ora in evidenza, dal punto di vista formale, alcune connessioni tra integrabilità e continuità. Per far ciò introduciamo la nozione di "oscillazione".

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto o la chiusura di un aperto tale che $D \cap A \neq \emptyset$; si definisce l'**oscillazione di f sull'insieme** D la quantità

$$\operatorname{osc}(f,D) := \sup_{D\cap A} f - \inf_{D\cap A} f = \sup_{x,y\in D\cap A} |f(x) - f(y)|\ . \tag{4.24}$$

Se $x \in A$ si definisce l'**oscillazione di f in** x la quantità

$$\operatorname{osc}(f,x) := \inf_{\delta>0} \operatorname{osc}(f, B_\delta(x)) := \inf_{\delta>0} \Big(\sup_{y\in A:|y-x|<\delta} f(y) - \inf_{y\in A:|y-x|<\delta} f(y) \Big)\ . \tag{4.25}$$

Dunque, *la continuità di f in x è equivalente a: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che* $\operatorname{osc}(f, B_\delta(x)) < \varepsilon$; o anche: *$f$ è continua in x se e solo se* $\operatorname{osc}(f,x) = 0$. D'altra parte, *l'integrabilità di f su E è equivalente a: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione P di E tale che*

$$\sum_{R\in\mathscr{R}} \operatorname{osc}(f,R) \operatorname{mis} R \le \varepsilon\ . \tag{4.26}$$

4.1.12 *Una funzione limitata $f : B \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice* **continua a tratti** *se $B = \bigcup_{i=1}^N B_i$ con $B_i \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabili e tali che $\mathring{B}_i \cap \mathring{B}_j = \emptyset$ per $i \neq j$ e se f è continua su $\mathring{B}_i$ per ogni i.*

4.2 Proprietà elementari

Discutiamo brevemente alcune proprietà elementari, ma fondamentali, dell'integrale di Riemann e della misura di Peano–Jordan.

In questo paragrafo E denota un rettangolo standard in $\mathbb{R}^n$, f, g funzioni limitate da E in $\mathbb{R}$ e B un sottoinsieme di E.

4.2.1 *f è integrabile su E se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione P di E tale che*

$$\begin{aligned}\overline{S}_E(f,P) - \underline{S}_E(f,P) &= \sum_{R\in\mathscr{R}(P)} \big(\sup_R f - \inf_R f\big) \operatorname{mis} R \\ &= \sum_{R\in\mathscr{R}(P)} \big(\sup_{x,y\in R} |f(x)-f(y)|\big) \operatorname{mis} R \\ &\le \varepsilon\ .\end{aligned} \tag{4.27}$$

Dimostrazione Innanzitutto si osservi che, in generale, si ha che

$$\sup_B f - \inf_B f = \sup_{x,y\in B} |f(x)-f(y)| \tag{4.28}$$

per *qualunque* B e $f : B \to \mathbb{R}$. Infatti, per ogni $x', y' \in B$ si ha che

$$f(x') - f(y') \le |f(x') - f(y')| \le \sup_{x,y\in B} |f(x)-f(y)|$$

e prendendo l'estremo superiore su x' e su y' si ha che

$$\sup_B f - \inf_B f \le \sup_{x,y\in B} |f(x)-f(y)|\ .$$

Viceversa, per ogni $x, y \in B$,

$$\inf_B f - \sup_B f \le f(x) - f(y) \le \sup_B f - \inf_B f$$

che implica che $|(fx) - f(y)| \le \sup_B f - \inf_B f$ e prendendo l'estremo superiore su $x, y \in B$ si ottiene anche che

$$\sup_{x,y\in B} |f(x)-f(y)| \le \sup_B f - \inf_B f\ ,$$

e quindi, la validità di (4.28), che a sua volta implica la seconda uguaglianza in (4.27).

La (4.27) implica immediatamente l'integrabilità di f su E. Viceversa, se f è integrabile, dato $\varepsilon > 0$, esistono due partizioni P' e P'' di E tali che

$$0 \le \overline{S}(f,P') - \underline{S}(f,P'') \le \varepsilon\ ,$$

e se poniamo $P = P' \cup P''$, da (4.11) segue che

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) \le \overline{S}(f,P') - \underline{S}(f,P'') \le \varepsilon$$

ossia la (4.27). ∎

4.2.2 *B è misurabile se e solo se χ_B è integrabile su E.*

Dimostrazione Sia P una partizione di E e si osservi che, per ogni $R \in \mathscr{R}(P)$,

$$\inf_R \chi_B = \begin{cases} 1\ , & \text{se } R \subseteq B \\ 0\ , & \text{altrimenti} \end{cases} \quad , \qquad \sup_R \chi_B = \begin{cases} 1\ , & \text{se } R \cap B \neq \emptyset \\ 0\ , & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi,

$$\underline{S}_E(\chi_B, P) = \sum_{R \in \mathscr{R}(P)} \inf_R \chi_B \operatorname{mis} R = \sum_{R \in \mathscr{R}'_B(P)} \operatorname{mis} R$$
$$\overline{S}_E(\chi_B, P) = \sum_{R \in \mathscr{R}(P)} \sup_R \chi_B \operatorname{mis} R = \sum_{R \in \mathscr{R}_B(P)} \operatorname{mis} R$$

da cui segue immediatamente l'asserto. ∎

4.2.3 *B è misurabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione P tale che*

$$\sum_{R \in \mathscr{R}_B \setminus \mathscr{R}'_B} \operatorname{mis} R \leq \varepsilon\ , \tag{4.29}$$

dove $\mathscr{R}_B := \mathscr{R}_B(P)$ e $\mathscr{R}'_B := \mathscr{R}'_B(P)$.

Dimostrazione Segue subito da 4.2.1 e 4.2.2. ∎

4.2.4 *Se f integrabile su B, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una partizione P tale che per ogni scelta di punti Q su B relativa a P si ha*

$$\Big| \int_B f(x)dx - S_B(f, P, Q) \Big| \leq \varepsilon\ . \tag{4.30}$$

In particolare[4]*, esistono partizioni P_k tai che per ogni scelta di punti Q_k su B relativa a P_k si ha*

$$\lim_{k\to\infty} S_B(f, P_k, Q_k) = \int_B f(x)dx\ . \tag{4.31}$$

Dimostrazione Segue subito da 4.2.1, 4.2.3 e dalle definizioni 4.1.7 e 4.1.10. ∎

4.2.5 *Siano f e g due funzioni integrabili su E.*

(i) *Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, la funzione $af + bg$ è integrabile su E e si ha*

$$\int_E (af + bg) = a\int_E f + b\int_E g\ . \tag{4.32}$$

(ii) *fg è integrabile su E.*

[4] Si scelga, ad esempio, $\varepsilon = 1/k$ in (4.30).

Dimostrazione (i): Si osservi che $\sup_{x,y\in R}|af(x)-af(y)| = |a|\sup_{x,y\in R}|f(x)-f(y)|$ e quindi, da 4.2.1, segue l'integrabilità di af; analogamente l'integrabilità di $f+g$ segue osservando che

$$\sup_{x,y\in R}|f(x)+g(x)-f(y)-g(y)| \le \sup_{x,y\in R}|f(x)-f(y)| + \sup_{x,y\in R}|g(x)-g(y)|$$

ed invocando nuovamente 4.2.1. La (4.32) segue osservando che le somme parziali di Riemann $S_E(\cdot,P,Q)$ (cfr. (4.23)) sono lineari[5] ed usando la 4.2.4.
(ii): Poiché f e g sono integrabili sono limitate, quindi esiste $M>0$ tale che $\sup_E|f|\le M$ e $\sup_E|g|\le M$. Per ogni x,y si ha che

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-f(y)g(y)| &\le |f(x)|\,|g(x)-g(y)|+|g(y)|\,|f(x)-f(y)|\\ &\le M\Big(|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|\Big)\end{aligned}$$

e l'integrabilità di fg segue, ancora, da 4.2.1. ∎

4.2.6 (i) *Se $f\ge 0$ è integrabile, allora $\int_E f\ge 0$.*
(ii) *Se $f\ge g$ sono integrabili allora $\int_E f\ge\int_E g$.*
(iii) *Una funzione f è integrabile su E se e solo se*[6] *f_+ e f_- sono integrabili su E.*
(iv) *Se f è integrabile su E, allora $|f|$ è integrabile su E e*

$$\Big|\int_E f\Big| \le \int_E |f|\ . \tag{4.35}$$

Dimostrazione (i) segue da (4.31) e (ii) da $f-g\ge 0$, da (4.32) e da (i).
(iii): Si osservi che[7] $|f_\pm(x)-f_\pm(y)|\le|f(x)-f(y)|$; dunque, se f è integrabile, per 4.2.1, si ha che anche f_+ e f_- sono integrabili. Viceversa se $f_\pm$ sono integrabili, l'integrabilità di f segue da lla relazione $f=f_+-f_+$ e da 4.2.5-(i).
(iv): $|f|=f_++f_-$ e da 4.2.5-(i) segue l'integrabilità di $|f|$ e (4.35) segue da

$$\Big|\int_E f\Big| = \Big|\int_E f_+ - \int_E f_-\Big| \le \int_E f_+ + \int_E f_- = \int_E |f|\ . \quad ∎$$

4.2.7 L'integrale di Riemann è "invariante per traslazioni":
Sia B è un insieme misurabile, $x_0\in\mathbb{R}^n$ e $x\to\tau(x):=x_0+x$ una traslazione. Allora[8] *$\tau(B)$ è misurabile e se f è integrabile su $\tau(B)$ allora $f\circ\tau$ è integrabile su B e*

$$\int_{\tau(B)} f(y)\ dy = \int_B f\circ\tau(x)\ dx\ . \tag{4.36}$$

In particolare (prendendo $f:=1$) si ha che $\mathrm{mis}(\tau(B))=\mathrm{mis}(B)$.

---

[5] Cioè $S_E(af+bg,P,Q)=aS_E(f,P,Q)+bS_E(g,P,Q)$ per ogni $a,b,\ f,g,\ P$ e Q.

[6] Data una funzione $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ si chiamano, rispettivamente, parte positiva e parte negativa di f, le funzioni

$$f_+(x)=\max\{f(x),0\}\ ,\qquad f_-(x)=-\min\{f(x),0\}=\max\{-f(x),0\}\ . \tag{4.33}$$

Si noti che f_+ e f_- sono ambedue funzioni non negative e che

$$f=f_+-f_-\ ,\qquad |f|=f_++f_-\ . \tag{4.34}$$

[7] Se $f(x)f(y)\ge 0$, vale l'uguaglianza; se, ad esempio $f(x)>0>f(y)$ il membro di sinistra è uguale a $f(x)$ e il membro di destra a $f(x)-f(y)=f(x)+|f(y)|$; il caso f_- segue osservando che $f_-=(-f)_+$.

[8] $\tau(B)=x_0+B=\{y: y=x_0+x \text{ con } x\in B\}$.

Dimostrazione Basta osservare che il traslato $\tau(R)$ di un rettangolo è un rettangolo e quindi che se P è una partizione di $E \supseteq B$, $x_0 + P$ è una partizione di $\tau(E) \supseteq \tau(B)$. La (4.36) segue, ad esempio, da (4.31). $\blacksquare$

4.2.8 *Se A e B sono misurabili allora:*

(i) *$A \cap B$ e $A \cup B$ sono misurabili;*

(ii) $\text{mis}(A \cup B) \leq \text{mis}\, A + \text{mis}\, B$*;*
se $\text{mis}(A \cap B) = 0$ *allora* $\text{mis}(A \cup B) = \text{mis}\, A + \text{mis}\, B$*;*

(iii) *se $A \subseteq B$,* $\text{mis}(B \backslash A) = \text{mis}\, B - \text{mis}\, A$*;*

(iv) *se f è integrabile su A e su B lo è anche su $A \cup B$ e se* $\text{mis}(A \cap B) = 0$ *allora*

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f \ . \tag{4.37}$$

Dimostrazione Segue subito da 4.2.2 e 4.2.5 osservando che

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B \ , \qquad \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B} \ . \quad \blacksquare \tag{4.38}$$

4.2.9 (i) *L'intersezione finita di rettangoli è un rettangolo.*

(ii) *L'unione finita di rettangoli chiusi è un insieme elementare*[9]*.*

(iii) *Gli insiemi elementari sono misurabili.*

Dimostrazione (i): Segue dal fatto che che l'intersezione di due intervalli è un intervallo.
(ii): Diamo la dimostrazione nel caso $n = 2$ (il caso generale è del tutto analogo). Siano $R_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]$ rettangoli in $E = [a, b] \times [c, d]$ con $1 \leq k \leq N$ e sia P_1 la partizione di $[a, b]$ che contiene tutti gli a_k e b_k e P_2 la partizione di $[c, d]$ che contiene tutti i c_k e d_k e $P = (P_1, P_2)$. Se $\mathscr{R}_* = \{R \in \mathscr{R}(P) : R \subseteq \cup R_k\}$ allora $\cup R_k = \cup_{R \in \mathscr{R}_*} R$, il che mostra che $\cup R_k$ è un insieme elementare.
(iii): Segue dal punto (i) di 4.2.8. $\blacksquare$

4.2.10 *Dato un rettangolo limitato chiuso R ed $\varepsilon > 0$ esistono N cubi chiusi $K_i \subseteq R$ tali che:*

(i) $\mathring{K}_i \cap \mathring{K}_j = \emptyset$*, per ogni $i \neq j$;*

(ii) $\text{mis}\Big(R \backslash \bigcup_{i=1}^N K_i\Big) \leq \varepsilon$*.*

Dimostrazione Sia $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, sia $L = \max(b_i - a_i)$ e $\delta = \varepsilon/(2^n L^{n-1})$, $P_i = \{a_i, a_i + \delta, ..., a_i + m_i\delta, b_i\}$ con $a_i + m_i\delta \leq b_i < a_i + (m_i + 1)\delta$ (cioè $m_i = (b_i - a_i)/\delta$). Allora i K_i della tesi saranno tutti i rettangoli di $\mathscr{R}(P)$ che hanno tutti i lati di lunghezza δ (ossia lati della forma $[a_i + jd, a_i + (j + 1)\delta]$ con $j \leq m_i - 1$): infatti $\text{mis}\Big(R \backslash \bigcup_{i=1}^N K_i\Big) \leq n\delta L^{n-1} = \varepsilon$. $\blacksquare$

---

[9] Cfr. 4.1.6.

4.2.11 (i) *B è misurabile se e solo se, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono due insiemi misurabili A e C tali che $A \subseteq B \subseteq C$ e $\operatorname{mis} C - \operatorname{mis} A \leq \varepsilon$.*
(ii) *B è misurabile se e solo se, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono due insiemi elementari A e C tali che $A \subseteq B \subseteq C$ e $\operatorname{mis} C - \operatorname{mis} A \leq \varepsilon$; tali insiemi elementari possono essere scelti come unione di cubi K_i tali che $\mathring{K}_i \cap \mathring{K}_j = \emptyset$.*

Dimostrazione (i): Se B è misurabile, dato ε sia P come in (4.29) e si prenda $A := \cup_{R \in \mathscr{R}'_B(P)} R$ e $C := \cup_{R \in \mathscr{R}_B(P)} R$.
Viceversa, si scelga una partizione P tale che $\sum_{R \in \mathscr{R}'_A} \operatorname{mis} R \geq \operatorname{mis} A - \varepsilon$ e $\sum_{R \in \mathscr{R}_C} \operatorname{mis} R \leq \operatorname{mis} C + \varepsilon$ e si usi 4.2.3.
(ii): Il "se" deriva dal punto (i) (poiché gli insiemi elementari sono misurabili). Il "solo se" deriva dalla dimostrazione di (i) (poiché gli insiemi scelti nella dimostrazione nel "solo se" di (i) sono elementari). L'ultima affermazione egue facilmente da 4.2.10. ∎

4.2.12 (i) *Se B è misurabile lo sono anche $\overline{B}$, $\mathring{B}$ e ∂B. Inoltre*

$$\operatorname{mis} \overline{B} = \operatorname{mis} \mathring{B} = \operatorname{mis} B \ . \tag{4.39}$$

(ii) *B è misurabile se e solo se B è limitato, ∂B è misurabile e $\operatorname{mis} \partial B = 0$.*

Dimostrazione (i): La misurabilità di $\overline{B}$ e $\mathring{B}$ e (4.39) seguono da 4.2.11–(i) prendendo $A := \bigcup_{R \in \mathscr{R}'_B} \mathring{R}$ e $C := \bigcup_{R \in \mathscr{R}_B} R$.
(ii): Assumiamo che B sia limitato, ∂B misurabile e $\operatorname{mis} \partial B = 0$. Sia E un rettangolo standard che contiene $\overline{B}$ (e quindi ∂B). Poiché $\operatorname{mis} \partial B = 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione P di E tale che $\partial B \subseteq \displaystyle\bigcup_{R \in \mathscr{R}_{\partial B}} R$ e $\displaystyle\sum_{R \in R \in \mathscr{R}_{\partial B}} \operatorname{mis} R \leq \varepsilon$. Se $R \in \mathscr{R}$ non interseca ∂B allora o $R \subseteq \mathring{B}$ oppure $R \subseteq E \backslash \overline{B}$.
Quindi, $\mathscr{R}_B = \mathscr{R}_{\partial B} \cup \mathscr{R}'_B$, che implica (4.29).
Il viceversa segue dal punto (i). ∎

4.2.13 *Sia $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme che ha misura nulla*[10] *e A un sottoinsieme limitato in $\mathbb{R}^m$. Allora $Q \times A \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ è misurabile e $\operatorname{mis}_{n+m} Q \times A = 0$.*

Dimostrazione Sia $\varepsilon > 0$ e sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme elementare tale che $D \supseteq Q$ e $\operatorname{mis}_n D \leq \varepsilon$. Poiché A è limitato, esiste $L > 0$ tale che $A \subseteq [-L, L]^m$. Allora $D \times [-L, L]^m$ è un insieme elementare di misura non superiore a $L^m \varepsilon$. Dall'arbitrarietà di ε segue la tesi. ∎

4.2.14 *Sia $F : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione uniformemente Lipschitziana con costante di Lipschitz $L > 0$ rispetto alla norma del sup*[11]*, allora*
(i) *per ogni $B \subseteq E$ misurabile $\operatorname{mis\,est}_m F(B) \leq L^m \operatorname{mis}_n B$.*
(ii) *se Q ha misura nulla allora $\operatorname{mis}_m F(Q) = 0$.*
(iii) *Se $m > n$, allora $\operatorname{mis}_m F(B) = 0$.*

---

[10] Ossia Q è misurabile secondo Peano–Jordan e $\operatorname{mis}_n Q = 0$.
[11] Ossia, esiste $L > 0$ tale che $|F(x) - F(y)| \leq L|y - x|$ per ogni $x, y \in E$ e $|\cdot| = |\cdot|_\infty$.

Dimostrazione Sia $\varepsilon > 0$ e sia $D \subseteq E$ un insieme elementare unione di cubi K_i tali che $\mathring{K}_i \cap \mathring{K}_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e tale che $B \subseteq D$ e $\mathrm{mis}_n\, D - \mathrm{mis}_n\, B \leq \varepsilon / L^m$ (cfr. 4.2.11–(ii)). Sia $x^{(i)}$ e r_i, rispettivamente il centro ed il lato di K_i: $K_i = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^{(i)}| \leq r_i/2\}$. Per ipotesi, $|F(x) - F(x^{(i)})| \leq L|x - x^{(i)}|$ il che implica che $F(K_i)$ è un sottoinsieme del cubo m–dimensionale K_i' di centro $F(x^{(i)})$ e lato Lr_i e tale cubo ha misura $(Lr_i)^m = L^m \,\mathrm{mis}_n\, K_i$. Quindi, poiché l'immagine dell'unione coincide con l'unione delle immagini, segue che

$$F(B) \subseteq F(D) = \bigcup_i F(K_i) \subseteq \bigcup_i K_i'$$

e quindi

$$\mathrm{mis\,est}_m F(B) \leq \sum_i \mathrm{mis}_m\, K_i' = L^m \sum_i \mathrm{mis}_n\, K_i = L^m\, \mathrm{mis}_n\, D \leq L^m\, \mathrm{mis}_n\, B + \varepsilon .$$

Dall'arbitrarietà di ε segue che $\mathrm{mis\,est}_m F(B) \leq L^m \,\mathrm{mis}_n\, B$.
(ii) segue immediatamente da (i).
(iii) Sia $\widehat{B} := B \times [0,1]^{m-n} \subseteq \mathbb{R}^m$ e sia $\hat{F}$ l'estensione di F a $\widehat{B}$ ponendo, per ogni $(x,y) \in Q \times [0,1]^{m-n}$, $\hat{F}(x,y) = F(x)$. Chiaramente $\hat{F}$ è Lipshitziana su $\widehat{B}$ e $\hat{F}(\widehat{B}) = F(B)$. Poiché $\mathrm{mis}_m\, \widehat{B} = 0$ (per 4.2.13) da (ii) segue che $\mathrm{mis}_m\, F(B) = 0$. ∎

I punti (ii) e (iii) non valgono, in generale, se assumiamo F semplicemente continua: in E **4.5** di fine sezione viene dato un esempio (la cosiddetta "curva di Peano") di una funzione continua $F : I := [0,1] \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la cui immagine sia tutto il cubo unitario $[0,1]^2$ e quindi trasforma il segmento I che ha misura (bidimensionale) nulla, nel cubo (quadrato) unitario che ha misura (bidimensionale) uguale ad uno.

4.2.15 (i) *Se* $s = \sum_{R \in \widehat{\mathscr{R}}(P)} c_R \chi_R$ *è una funzione a scalini (cfr. 4.1.8), allora s è integrabile e*

$$\int s = \sum_{R \in \widehat{\mathscr{R}}(P)} c_R \,\mathrm{mis}\, R \ . \tag{4.40}$$

(ii) *f è integrabile su E se e solo se, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono due funzioni a scalini su E, $s_1(x)$ e $s_2(x)$, tali che*

$$s_1(x) \leq f(x) \leq s_2(x) \ , \qquad \forall\, x \in E \ , \qquad \text{e} \quad \int_E \Big(s_2 - s_1\Big) \ \leq \varepsilon \ ; \tag{4.41}$$

tali funzioni possono essere espresse intermini dello stesso ricoprimento disgiunto di E.
(iii) *f è integrabile su E se e solo se esistono due funzioni integrabili su E, g_1 e g_2 tali che*

$$g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x) \ , \qquad \forall\, x \in E \ , \qquad \text{e} \quad \int_E \Big(g_2 - g_1\Big) \ \leq \varepsilon \ ; \tag{4.42}$$

Dimostrazione (i): Un rettangolo limitato è misurabile e la sua misura è l'integrale della sua funzione caratteristica; dunque da 4.2.6 e 4.2.5 segue la tesi.
(ii): Sia f integrabile ed $\varepsilon > 0$. Sia P una partizione come in (4.27) e sia $\widehat{\mathscr{R}}(P)$ un qualunque ricoprimeno disgiunto associato a P. Chiaramente, per ogni $R \in \widehat{\mathscr{R}}$, si ha $\sup_R f - \inf_R f \leq \sup_{\overline{R}} f - \inf_{\overline{R}} f$ e quindi se $\bar{c}_R = \sup_R f$, $\underline{c}_R = \inf_R f$, $s_2 = \sum_{R \in \widehat{\mathscr{R}}} \bar{c}_R \chi_R$ e $s_1 = \sum_{R \in \widehat{\mathscr{R}}} \underline{c}_R \chi_R$, segue la (4.41).
Assumiamo, ora, che valga la (4.41). Prendendo la partizione unione P associata alle due rappresentazioni si ottiene subito che s_1 e s_2 possono essere espresse in termini dello stesso ricoprimento disgiunto di E associato ad una stessa partizione P come in (4.4). Sia $0 < \delta < \min_{i,j} (\xi_{j+1}^{(i)} - \xi_j^{(i)})/2$

e consideriamo la partizione $P^\delta = (P_1^\delta, .., P_n^\delta)$ con $P_i^\delta = \{\xi_0^{(i)}, \xi_0^{(i)} + \delta, \xi_1^{(i)} - \delta, \xi_1^{(i)}, \xi_1^{(i)} + \delta, ...\}$. I rettangoli di $\mathscr{R}()P^\delta)$ si suddividono in due famiglie: la prima, $\mathscr{R}_1$, formata da rettangoli R contenuti all'interno di un rettangolo di $\mathscr{R}(P$ ed una seconda famiglia, $\mathscr{R}_2$, formata da rettangoli in cui almeno un lato ha misura δ. Si osservi che se $R \in \mathcal{R}_1$, $\sup_R f - \inf_R f \leq \sup_R s_2 - \inf_R s_1$ e che, quindi,

$$\sum_{R\in\mathscr{R}_1} \sup_R f - \inf_R f \,\mathrm{mis}\, R \leq \sum_{R\in\mathscr{R}_1} \sup_R s_2 - \inf_R s_1 \,\mathrm{mis}\, R \leq \sum_{R\in\mathscr{R}} \sup_R s_2 - \inf_R s_1 \,\mathrm{mis}\, R \leq \varepsilon \ .$$

D'altra parte, esiste una costante $c >$ indipendente da δ, tale che $\sum_{R\in\mathcal{R}_2} \mathrm{mis}\, R < c\delta$. Dall'arbitrarietà di δ segue l'asserto.

(iii) Deriva facilmente dai punti (ii) e (i) precedenti. ∎

4.2.16 *Se $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e limitata su di un insieme misurabile $A \subseteq \mathbb{R}^n$ allora f è integrabile su A.*

Dimostrazione Sia $\varepsilon > 0$ e sia E un rettangolo standard contenente A e sia P una partizione di E per cui valga 4.29 con $B = A$. Poiché f è continua sul compatto $K := \bigcup_{R\in\mathscr{R}'_A} R \subseteq A$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$ per ogni coppia di punti x e x' in K con $|x - x'| \leq \delta$. Sia P' un raffinamento di P di diametro non superiore a δ e chiamiamo $\mathscr{R}_1$ i rettangoli di $\mathscr{R}(P')$ che appartengono a K e $\mathscr{R}_2 := \mathscr{R}_A(P')\backslash\mathscr{R}_1$. Chiaramente da (4.29) segue che $\sum_{R\in\mathscr{R}_2} \mathrm{mis}\, R \leq \varepsilon$ e che $\mathrm{osc}\,(f_A, R) := \mathrm{osc}\,(f, R) \leq \varepsilon$ per ogni $R \in \mathscr{R}_1$. Dunque

$$\sum_{R\in\mathscr{R}(P')} \mathrm{osc}\,(f_A, R)\,\mathrm{mis}\, R \leq 2\sup_A |f| \sum_{R\in\mathscr{R}_2} \mathrm{mis}\, R + \varepsilon \sum_{R\in\mathscr{R}_1} \mathrm{mis}\, R \leq \varepsilon(2\sup_A |f| + \mathrm{mis}\, A).$$

Da 4.1.11 e dall'arbitrarietà di ε segue la tesi. ∎

4.2.17 *Sia $F : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente Lipschitziana con costante di Lipschitz $L > 0$ rispetto alla norma del sup. Allora, per ogni $\delta > 0$, per ogni partizione P di E con $\mathrm{diam}\, P \leq \delta$ e per ogni scelta di punti Q relativa a P si ha*[12]

$$\Big|\int_E f(x)\ dx - S(f, P, Q)\Big| \leq \delta\ L\ \ \mathrm{mis}\, E\ . \tag{4.43}$$

Dimostrazione Segue subito osservando che se il diametro della partizione P è minore di δ, l'oscillazione di F su un rettangolo qualunque della partizione è minore di $L\delta$. ∎

4.2.18 *Se $\{f_k\}$ e f sono funzioni continue su di un insieme misurabile A e se $f_k \to f$ uniformemente*[13] *su A allora $\lim \int_A f_k = \int_A f$.*

Dimostrazione Se ε e N sono come nella nota 13, allora, per ogni $k > N$ si ah che: $\Big|\int_A f_k - \int_A f\Big| \leq \int_A |f_k - f| \leq \varepsilon\,\mathrm{mis}\, A$. ∎

---

[12] Questa formula è alla base del calcolo approssimato (con un semplice controllo dell'errore) degli integrali di funzioni regolari su rettangoli.

[13] Cioè "per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $k > N$ e per ogni $x \in A$".

4.2.19 *Se* $f : B = \bigcup_i B_i \to \mathbb{R}$ *è continua a tratti (cfr. 4.1.12), allora* f *è integrabile su* B *e*

$$\int_B f = \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathring{B}_i} f \ .$$

Dimostrazione Da 4.2.12 segue che B è misurabile e che (essendo $\mathrm{mis}\, \partial B_i = 0$ per ogni i) $\mathrm{mis}\, B = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{mis}\, B_i$; da 4.2.16 segue la tesi. ∎

4.3 Integrali iterati

La seguente proposizione, di fondamentale importanza nella pratica, permette, sotto opportune ipotesi sul dominio di integrazione, di ridurre il calcolo di un integrale n–dimensionale (ovvero di una funzione di n variabili) al calcolo successivo di un integrale unidimensionale e di un integrale $(n-1)$–dimensionale.

Proposizione 4.1 *Sia* $n \geq 2$ *e* $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ *un insieme misurabile; siano* α *e* β *due funzioni integrabili su* A *e sia* $B \subseteq \mathbb{R}^n$ *l'insieme definito come*

$$B := \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} : \ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\} \ . \tag{4.44}$$

Allora: (i) B *è misurabile e*

$$\mathrm{mis}\, B = \int_A \Big(\beta(x) - \alpha(x)\Big) dx \ . \tag{4.45}$$

(ii) *Se* f *è una funzione integrabile su* B *e* $y \to f(x, y)$ *è integrabile su* $[\alpha(x), \beta(x)]$ *per ogni* $x \in A$ *allora la funzione*

$$g(x) := \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \ dy \tag{4.46}$$

è integrabile su A *e,* (iii),

$$\int_B f \ = \ \int_A g := \int_A \Big(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \ dy \Big) dx \ . \tag{4.47}$$

Osservazione 4.2 (i) Un insieme B della forma (4.44) prende il nome di **insieme normale** rispetto all'asse delle[14] y; nel caso A sia misurabile e le funzioni α e β siano continue e limitate su A l'insieme B si dice C^0–normale. Ovviamente un rettangolo E è normale (rispetto a qualunque asse e le funzioni α e β sono costanti).
(ii) Un caso assai importante nelle applicazioni è quando α, β e f sono continue e limitate (rispettivamente su A e su B): in tal caso infatti, per 4.2.16, le ipotesi della Proposizione 4.1 sono soddisfatte.
(iii) È chiaro che se α, β e f sono continue e limitate (su A e su B) e se A è a sua volta un insieme C^0–normale in $\mathbb{R}^{n-1}$ la proposizione può essere riapplicata. *Iterando, ove possibile, si ridurrà il calcolo dell'integrale di* f *su* B *al calcolo successivo di* n *integrali unidimensionali.*

[14] Naturalmente il ruolo di x_1,...,x_{n-1} e y è del tutto arbitrario e analogamente si definirà un insieme normale rispetto ad un qualunque asse.

In particolare se $E := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ è un rettangolo standard e $f \in C(E)$ e se σ è una qualunque una permutazione[15] di $\{1, ..., n\}$, allora

$$\int_E f = \int_{a_{\sigma_n}}^{b_{\sigma_n}} \Big(\cdots \Big(\int_{a_{\sigma_1}}^{b_{\sigma_1}} f(x) dx_{\sigma_1} \Big) \cdots \Big) dx_{\sigma_n} \ . \tag{4.48}$$

(iv) Le ipotesi della Proposizione 4.1 non possono essere indebolite; si vedano a tal proposito E **4.2** e E **4.3** di fine sezione.

Dimostrazione Sia E un rettangolo standard in $\mathbb{R}^{n-1}$ che contiene A e sia $a := \inf_A \alpha < b := \sup_A \beta$, cosicché $B \subseteq E' := E \times [a, b]$.
Cominciamo col dimostrare la misurabilità di B costruendo, dato $\varepsilon > 0$, due insiemi elementari B_1 e B_2 tali che $B_1 \subseteq B \subseteq B_2$ e $\text{mis}_n\, B_2 \backslash B_1 \leq c\, \varepsilon$ con una costante $c > 0$ indipendente da ε (cfr. 4.2.11–(ii)). Dalle ipotesi segue che esiste una partizione P di E tale che

$$\sum_{R \in \mathscr{R}_A(P) \backslash \mathscr{R}'_A(P)} \text{mis}\, R \leq \varepsilon \ , \tag{4.49}$$

$$\sum_{R \in \mathscr{R}(P)} \text{osc}\,(\alpha_A, R)\, \text{mis}\, R \leq \varepsilon \ , \qquad \sum_{R \in \mathscr{R}(P)} \text{osc}\,(\beta_A, R)\, \text{mis}\, R \leq \varepsilon \ , \tag{4.50}$$

dove $\text{mis} = \text{mis}_{n-1}$. Definiamo le seguenti famiglie disgiunte di rettangoli di $\mathscr{R}(P)$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}_0 &:= \mathscr{R}_A(P) \backslash \mathscr{R}'_A(P) \ , \\
\mathscr{R}_1 &:= \{R \in \mathscr{R}'_A(P) : \ \sup_R \alpha \geq \inf_R \beta\} \ , \\
\mathscr{R}_2 &:= \mathscr{R}'_A(P) \backslash \mathscr{R}_1 = \{R \in \mathscr{R}'_A(P) : \ \sup_R \alpha < \inf_R \beta\} \ .
\end{aligned}$$

Si noti che $\mathscr{R}_1$ potrebbe essere vuota, ma se non lo è, allora per ogni $R \in \mathscr{R}_1$ si ha che

$$\begin{aligned}
\sup_R \beta - \inf_R \alpha &= (\sup_R \beta - \inf_R \beta) - (\sup_R \alpha - \inf_R \beta) + (\sup_R \alpha - \inf_R \alpha) \\
&\leq (\sup_R \beta - \inf_R \beta) + (\sup_R \alpha - \inf_R \alpha) \\
&= \text{osc}\,(\beta_A, R) + \text{osc}\,(\alpha_A, R) \ .
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Definiamo ora

$$\begin{aligned}
B_1 &:= \bigcup_{R \in \mathscr{R}_2} R \times [\sup_R \alpha, \inf_R \beta] \ , \\
B_2^{(0)} &:= \bigcup_{R \in \mathscr{R}_0} R \times [a, b] \ , \\
B_2^{(1)} &:= \bigcup_{R \in \mathscr{R}_1} R \times [\inf_R \alpha, \sup_R \beta] \ , \\
B_2^{(2)} &:= \bigcup_{R \in \mathscr{R}_2} R \times [\inf_R \alpha, \sup_R \beta] \ , \\
B_2 &:= B_2^{(0)} \cup B_2^{(1)} \cup B_2^{(2)} \ .
\end{aligned}$$

Chiaramente questi insiemi sono elementari e

$$B_1 \subseteq B \subseteq B_2 \ , \qquad B_2 \backslash B_1 = B_2^{(0)} \cup B_2^{(1)} \cup (B_2^{(2)} \backslash B_1) \ .$$

[15] Una permutazione σ dell'insieme $I = \{1, ..., n\}$ è una applicazione biunivoca $\sigma : i \in I \to \sigma_i \in I$.

Ora, da (4.49) segue che

$$\mathrm{mis}_n\, B_2^{(0)} = \Big(\sum_{R\in\mathscr{R}_0} \mathrm{mis}_n\, R\Big)(b-a) \le \varepsilon(b-a) \quad ; \tag{4.52}$$

mentre da (4.51) e da (4.50) segue che

$$\mathrm{mis}_n\, B_2^{(1)} = \sum_{R\in\mathscr{R}_1} (\mathrm{mis}\, R)\,(\sup_R \beta - \inf_R \alpha) \le \sum_{R\in\mathscr{R}_1} (\mathrm{mis}\, R)\,\Big(\,\mathrm{osc}\,(\beta_A, R) + \,\mathrm{osc}\,(\alpha_A, R)\Big) \le 2\varepsilon\ . \tag{4.53}$$

Infine,

$$\begin{aligned}\mathrm{mis}_n(B_2^{(2)}\backslash B_1) &= \sum_{R\in\mathscr{R}_2} (\mathrm{mis}\, R)\Big((\sup_R \beta - \inf_R \beta) + (\sup_R \alpha - \inf_R \alpha)\Big)\\ &\le \sum_{R\in\mathscr{R}(P)} \mathrm{osc}\,(\alpha_A, R)\,\mathrm{mis}\, R + \sum_{R\in\mathscr{R}(P)} \mathrm{osc}\,(\beta_A, R)\,\mathrm{mis}\, R\\ &\le 2\varepsilon\ .\end{aligned} \tag{4.54}$$

Mettendo assieme (4.52)÷(4.54) si ha che mis $B_2\backslash B_1 \le c\varepsilon$ con $c = 4 + (b-a)$ da cui segue la misurabilità di B.

Dimostriamo l'integrabilità di g su A e simultaneamente la (4.47) (dalla quale deriva immediatamente (4.45) scegliendo $f := 1$). Innanzitutto g è limitata su A infatti, per ogni $x \in A$, si ha

$$|g(x)| \le (\sup_A |\beta-\alpha|)\ (\sup_B |f|) \le \Big(\sup_A |\beta| + \sup_A |\alpha|\Big)(\sup_B |f|)\ .$$

Sia ora P' una qualunque partizione di E' e si noti che $P' = (P, P_n)$ con P partizione di E e P_n partizione di $[a,b]$ e che i rettangoli R' di $\mathscr{R}(P')$ sono dati dai prodotti cartesiani dei rettangoli $R \in \mathscr{R}(P)$ per rettangoli (intervalli) $I \in \mathscr{R}(P_n)$. Si noti anche che dalle ipotesi segue che la funzione di una variabile $y \to f_B(x,y)$ è integrabile su I. Quindi, dato $R' = R\times I \in \mathscr{R}(P')$ e fissato $x \in R$, integrando su I la relazione

$$\inf_{R'} f_B \le f_B(x,y) \le \sup_{R'} f_B\ , \tag{4.55}$$

si ha che

$$(\inf_{R'} f_B)\,\mathrm{mis}\, I \le \int_{I'} f_B(x,y)dy \le (\sup_{R'} f_B)\,\mathrm{mis}\, I\ . \tag{4.56}$$

Sommando le relazioni in (4.56) su tutti gli $I \in \mathscr{R}(P_n)$ (tenendo fisso il rettangolo R di $\mathscr{R}(P)$), otteniamo per ogni $x \in R$,

$$\begin{aligned}\sum_{I\in\mathscr{R}(P_n)} (\inf_{R'} f_B)\,\mathrm{mis}\, I &\le \int_I f_B(x,y)dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_B(x,y)dy = g_A(x)\\ \sum_{I\in\mathscr{R}(P_n)} (\sup_{R'} f_B)\,\mathrm{mis}\, I &\ge \int_I f_B(x,y)dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_B(x,y)dy = g_A(x)\ .\end{aligned} \tag{4.57}$$

Prendendo, rispettivamente, l'estremo inferiore su R nella prima riga di (4.57) e quello superiore nella seconda, otteniamo

$$\sum_{I\in\mathscr{R}(P_n)} (\inf_{R'} f_B)\,\mathrm{mis}\, I \le \inf_R g_A\ , \qquad \sum_{I\in\mathscr{R}(P_n)} (\sup_{R'} f_B)\,\mathrm{mis}\, I \ge \sup_R g_A\ . \tag{4.58}$$

Quindi,

$$\begin{aligned}\underline{S}_{E'}(f_B, P') &= \sum_{R'\in\mathscr{R}(P)} (\inf_{R'} f_B)\,\mathrm{mis}(R') = \sum_{\substack{R\in\mathscr{R}(P)\\ I\in\mathscr{R}(P_n)}} (\inf_{R'} f_B)\,\mathrm{mis}\,R\cdot\mathrm{mis}\,I\\ &= \sum_{R\in\mathscr{R}(P)} \mathrm{mis}\,R \sum_{I\in\mathscr{R}(P_n)} (\inf_{R'} f_B)\,\mathrm{mis}\,I\\ &\le \sum_{R\in\mathscr{R}(P)} \mathrm{mis}\,R \inf_R g_A = \underline{S}_E(g_A, P) \qquad (4.59)\end{aligned}$$

e (ragionando in maniera analoga per le somme superiori ed usando la seconda delle (4.59)) si ottiene $\overline{S}_{E'}(f_B, P') \ge \overline{S}_E(g_A, P)$. Dall'integrabilità di f_B su E' segue dunque l'asserto. ∎

4.4 Il teorema del cambio di variabili

Teorema 4.3 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto misurabile e $\phi \in C^1(\overline{A}, \mathbb{R}^n)$ tale che*[16]

$$\phi \text{ è iniettiva in } A\ , \qquad \det\phi' \neq 0 \quad \text{su } A\ . \tag{4.60}$$

Allora $B := \phi(A)$ è un aperto misurabile di $\mathbb{R}^n$ e se f è una funzione integrabile su B allora $f\circ\phi$ è integrabile su A e si ha che

$$\int_B f(y)dy = \int_A f\circ\phi(x)\,\big|\det\phi'(x)\big|dx\ . \tag{4.61}$$

In particolare, per $f \equiv 1$, si ha

$$\mathrm{mis}(\phi(A)) = \int_A \big|\det\phi'(x)\big|dx\ . \tag{4.62}$$

In questo paragrafo $|x|$ denota la norma del sup in $\mathbb{R}^n$ ($|x| = \max_i |x_i|$) e, se T è una matrice, $\|T\|$ la relativa norma matriciale ($\|T\| = \sup_{|x|=1} |Tx|$).
Cominciamo con il seguente

Lemma 4.4 *Siano A e ϕ come nel Teorema 4.3. Allora*
(i) *$B = \phi(A)$ è un aperto misurabile di $\mathbb{R}^n$.*
(ii) *Per ogni insieme D tale che $\overline{D} \subseteq A$ si ha che $\partial\phi(D) = \phi(\partial D)$; se D è misurabile lo è anche $\phi(D)$.*

Dimostrazione (i) Ovviamente B è limitato (essendo ϕ continua sulla chiusura di A). Dal teorema della funzione inversa segue che B è un insieme aperto.
Dimostriamo ora che

$$\partial B \subseteq \phi(\partial A)\ . \tag{4.63}$$

Sia $y \in \partial B$. Essendo B aperto, $y \notin B$ ed esistono $y_n \in B$ tali che $y_n \to y$. Siano $x_n \in A$ tali che $\phi(x_n) = y_n$. Poiché $\overline{A}$ è compatto, esiste una sottosuccesione x_{n_k} in $\overline{A}$ tale che $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in \overline{A}$. Per la continuità di ϕ, $\phi(x_{n_k}) = y_{n_k} \to \phi(x)$, cioè $y = \phi(x)$. Ma allora $x \in \partial A$: se fosse $x \in A$, $y = \phi(x)$ apparterrebbe a B ed avremmo una contraddizione. La (4.63) è dimostrata.

[16] Si ricorda che $\phi' = \phi'(x)$ denota lo jacobiano di ϕ ossia la matrice con elementi $\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}$.

Poiché A è misurabile, la sua frontiera ha misura nulla (4.2.12); quindi (essendo ϕ uniformemente Lpschitziana su $\overline{A}$) da 4.2.14–(ii) segue che anche $\phi(\partial A)$ ha misura nulla e quindi, per (4.63), anche ∂B ha misura nulla; dunque per 4.2.12 possiamo concludere che B è misurabile.
(ii) Dalle ipotesi (4.60) e dal teorema della funzione inversa segue che ϕ è un omemomorfismo[17] da A su B e questo implica, in particolare, che $\partial\phi(D) = \phi(\partial D)$ per ogni insieme D tale che $\overline{D} \subseteq A$ (cosicché anche $\partial D \subseteq A$). Da 4.2.14–(ii) e 4.2.12 segue che se D è misurabile, lo è anche $\phi(D)$. ∎

Il seguente lemma spiega la presenza del determinante nel Teorema 4.3. Prima di enunciarlo, ricordiamo le proprietà fondamentali del determinante ed introduciamo il concetto di parallelepipedo n–dimensionale.

Si ricordi che il determinante, visto come funzione delle colonne, è caratterizzato dalle seguenti tre proprietà: 1) scambiando di posto a due colonne, il valore del determinante cambia segno, 2) il determinante è una funzione lineare della prima colonna[18], 3) il determinante di $(e^{(1)}, ..., e^{(n)})$, dove $\{e^{(i)}\}$ è la base standard di $\mathbb{R}^n$, vale 1. Tale caratterizzazione significa che se Δ è una funzione a valori reali e definita su n–nuple di vettori in $\mathbb{R}^n$ che verifica

$$\begin{aligned}
&1) \quad \Delta(..., v^{(i)}, ..., v^{(j)}, ...) = -\Delta(..., v^{(j)}, ..., v^{(i)}, ...) \ , \quad i \neq j \ ,\\
&2) \quad \Delta(av^{(1)} + bw^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) =\\
&\qquad\qquad = a\Delta(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) + b\Delta(w^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \ ,\\
&3) \quad \Delta(e^{(1)}, ..., e^{(n)}) = 1 \ ,
\end{aligned} \tag{4.64}$$

(dove la scrittura simbolica nel punto 1) sta a significare che scambiando l'i–esimo argomento lo j–esimo, il valore di Δ cambia segno) allora Δ coincide con il determinante, cioè

$$\Delta(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) = \det[v^{(1)}, ..., v^{(n)}] = \sum_{\sigma} \varepsilon_\sigma v^{(1)}_{\sigma_1} \cdots v^{(n)}_{\sigma_n} \ ,$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le permutazioni σ dell'insieme $\{1, ..., n\}$ e ε_σ denota il[19] "segno di σ".

Siano, ora, $v^{(1)}$,..., $v^{(n)}$, n vettori in $\mathbb{R}^n$ e sia $T := [v^{(1)}, ..., v^{(n)}]$ la matrice che ha come j–esima colonna le n componenti, $v^{(j)}_i$, di $v^{(j)}$.

Definizione 4.5 *Si chiama "parallelepipedo con lati $v^{(1)}, ..., v^{(n)}$" (o anche "parallelepipedo generato da $v^{(1)}, ..., v^{(n)}$") l'insieme*

$$\Pi(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) := \{y \in \mathbb{R}^n : \ y = \sum_{j=1}^{n} x_j v^{(j)} \ \text{ con } \ 0 \le x_j \le 1 \ , \forall 1 \le j \le n\} \ . \tag{4.65}$$

Se $x \in \mathbb{R}^n$, $Tx = \sum_{j=1}^{n} x_j v^{(j)}$, dunque da tale definizione segue immediatamente che

$$\Pi(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) = TK_1 \ , \qquad \Big(T := [v^{(1)}, ..., v^{(n)}] \ , K_1 := [0,1]^n\Big) \ . \tag{4.66}$$

[17]Ossia una funzione continua, invertibile con inversa continua.

[18]E dunque, per 1), il determinante è una funzione lineare della j–esima colonna, con j qualunque.

[19]Una permutazione σ di $\{1, ..., n\}$ è una mappa uno–uno $\sigma : j \in \{1, ..., n\} \to \sigma_j \in \{1, ..., n\}$ e ε_σ è il segno di σ (cioè $(-1)^p$ dove p è il numero di scambi che bisogna fare per ordinare la n–nupla $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ o, più analiticamente, $\varepsilon_\sigma = \prod_{i<j} \text{segno}(\sigma_j - \sigma_i)$).

Lemma 4.6 *Sia T una matrice $(n \times n)$ e $K_1 = [0,1]^n$. Allora*[20]

$$\mathrm{mis}_n(TK_1) = \big|\det T\big| \ . \tag{4.67}$$

Inoltre se R un rettangolo limitato di $\mathbb{R}^n$ si ha

$$\mathrm{mis}_n(TR) = \big|\det T\big|\, \mathrm{mis}_n\, R \ . \tag{4.68}$$

Dimostrazione Il caso $n = 1$ (e quindi $T \in \mathbb{R}$) è immediato essendo $T[0,1] = [0,T]$ se $T \geq 0$ e $[T,0]$ se $T < 0$, la cui misura è $|T|$ in entrambi i casi.
Consideriamo $n \geq 2$. Identificando una n-pla di vettori in $\mathbb{R}^n$, $(v^{(1)},...,v^{(n)})$, con la matrice $T := [v^{(1)},...,v^{(n)}]$, definiamo

$$\Delta_0(v^{(1)},...,v^{(n)}) := \mathrm{mis}\Big(\Pi(v^{(1)},...,v^{(n)}\Big) \ , \tag{4.69}$$

e[21]

$$\Delta(T) := \ \mathrm{segno}\,(\det T)\ \Delta_0(T) \ . \tag{4.70}$$

Si noti che se $\det T = 0$, $\Pi(T)$ è contenuto in uno spazio vettoriale di dimensione $m < n$ e dunque , in tal caso, $\mathrm{mis}(\Pi(T)) = 0$ e $\Delta(T) = 0$.
Per dimostrare (4.67) basterà dimostrare che la funzione Δ verifica 1), 2), 3) di (4.64) cosicché si avrà $\Delta(T) = \det T$ e prendendo il modulo di tale relazione si otterrà (4.67).
Dalla definizione di $\Pi(v^{(1)},...,v^{(n)})$ segue che

$$\Pi(...,v^{(i)},...,v^{(j)},...) = \Pi(...,v^{(j)},...,v^{(i)},...) \tag{4.71}$$

e da (4.66) e da (4.70) segue immediatamente che, scambiando due vettori di posto, Δ cambia segno: la proprietà 1) è verificata.
È anche chiaro che

$$\Pi(e^{(1)},...,e^{(n)}) = K_1 \tag{4.72}$$

e dunque $\Delta(e^{(1)},...,e^{(n)}) = 1$ e cioè vale la proprietà 3). Più delicata è la verifica della linearità. Cominciamo con l'osservare che se p è un intero positivo, notando che $[0,p] = \{x_1 p : 0 \leq x_1 \leq 1\} = \cup_{i=1}^p (i-1) + [0,1]$,

$$\begin{aligned}
\Pi(pv^{(1)},v^{(2)},...,v^{(n)}) \quad &:= \{x_1 p v^{(1)} + \sum_{j=2}^n x_j v^{(j)} :\ 0 \leq x_j \leq 1\} \\
&= \bigcup_{i=1}^p \{(i-1+x_1)v^{(1)} + \sum_{j=2}^n x_j v^{(j)} :\ 0 \leq x_j \leq 1\} \\
&= \bigcup_{i=1}^p \Big((i-1)v^{(1)} + \Pi(v^{(1)},...,v^{(n)})\Big) \ .
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Poiché l'insieme nell'ultima riga di (4.73) è formato dall'unione di p insiemi di eguale misura (essendo la misura invariante per traslazioni) aventi in comune solo insiemi di misura nulla ("facce" dei parallelepipedi), si ha che la misura di $\Pi(pv^{(1)},v^{(2)},...)$ è p volte la misura di $\Pi(v^{(1)},v^{(2)},...)$; cioè

$$\Delta_0(av^{(1)},...,v^{(n)}) = a\Delta_0(v^{(1)},...,v^{(n)}) \tag{4.74}$$

[20] Si noti che (4.67) è un caso speciale di (4.62) prendendo $x \in \mathbb{R}^n \to \phi(x) = Tx$ (essendo $\phi' = T$) e $A = \mathring{R}$..
[21] Useremo qui la convenzione che $\mathrm{segno}\,(0) = 0$.

vale con $a = p$ intero positivo. Ora se $\det T > 0$ da (4.74) segue

$$\Delta(av^{(1)}, ..., v^{(n)}) = a\Delta(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \ , \tag{4.75}$$

e se $\det T < 0$, per (4.74) si ha che

$$\begin{aligned} \Delta(av^{(1)}, ..., v^{(n)}) &= -\Delta_0(av^{(1)}, ..., v^{(n)}) \\ &= -a\Delta_0(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \\ &= a\Delta(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \ , \end{aligned} \tag{4.76}$$

il che dimostra la (4.75) per ogni T. Ora,

$$\Delta(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) = \Delta(p\ \frac{1}{p}v^{(1)}, ..., v^{(n)}) = p\Delta(\frac{1}{p}v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \tag{4.77}$$

e quindi (dividendo la (4.77) per p, si vede che) (4.75) vale anche per $a = \frac{1}{p}$ con p intero positivo. Combinando questi due fatti si ottiene subito che (4.75) vale per a numero razionale positivo. Dopodiché osservando che, se $0 < \alpha < \beta$

$$\Pi(\alpha v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \subseteq \Pi(\beta v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \tag{4.78}$$

si ottiene facilmente (4.74) per $a \in (0, \infty)$: basta infatti considerare due successioni monotone di numeri razionali positivi, $a_i < a < a_i'$ che tendano, rispettivamente da sinistra e da destra al numero reale a, ed usare (4.75) per razionali positivi che insieme alla relazione (4.78) implica

$$a_i\Delta_0(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \le \Delta_0(av^{(1)}, .., v^{(n)}) \le a_i'\Delta_0(v^{(1)}, ..., v^{(n)})$$

e prendendo il limite per $i \to \infty$ si ottiene (4.74) con a numero reale positivo. Da (4.74) segue la (4.75) quando $\det T > 0$ e, nel caso $\det T < 0$, la (4.75) per $a > 0$ segue da (4.76). Per $a = 0$, (4.75) deriva immediatamente dalla definizione, essendo $\det[0, v^{(2)}, .., v^{(n)}] = 0$. Infine, se $a = -1$,

$$\begin{aligned} v^{(1)} + \Pi(-v^{(1)}, ..., v^{(n)}) &= \{(1 - x_1)v^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} x_j v^{(j)} : \ 0 \le x_j \le 1\} \\ &= \Pi(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \end{aligned} \tag{4.79}$$

e dunque, essendo il segno di $\det(-v^{(1)}, ..., v^{(n)})$ opposto a quello di $\det(v^{(1)}, ..., v^{(n)})$, si ottiene (4.75) con $a = -1$. Infine se a è un numero reale negativo, $a = -|a|$, si ottiene

$$\Delta(av^{(1)}, ..., v^{(n)}) = -\Delta(|a|v^{(1)}, ..., v^{(n)}) = a\Delta(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \ ,$$

quindi (4.75) è vera per ogni $a \in \mathbb{R}$.
Usando la (già dimostrata) proprietà 1) si ottiene immediatamente che

$$\Delta(v^{(1)}, ..., av^{(j)}, ..., v^{(n)}) = a\Delta(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \ , \tag{4.80}$$

per qualunque $1 \le j \le n$.
Resta ora da dimostrare

$$\Delta(v + w, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) = \Delta(v, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) + \Delta(w, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \ . \tag{4.81}$$

Cominciamo col discutere un caso particolare di (4.81) e cioè $v = v^{(1)}$, $w = v^{(2)}$ (in qual caso il secondo addendo a destra di (4.81) è nullo per definizione di Δ), ossia, dimostriamo che

$$\Delta(v^{(1)} + v^{(2)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) = \Delta(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \ . \tag{4.82}$$

Se $\det T = \det[v^{(1)}, ..., v^{(n)}] = 0$, la (4.82) è chiaramente vera. Assumiamo che $\det T > 0$ e introduciamo i seguenti "prismi"

$$D_1 := \{x \in K_1 : x_2 \le x_1\} \ , \quad D_2 := \{x \in K_1 : x_2 \ge x_1\} \ , \quad D_3 := e^{(2)} + D_1 \tag{4.83}$$

e si noti che $\mathrm{mis}(D_1 \cap D_2) = 0$, $\mathrm{mis}(D_2 \cap D_3) = 0$; che $\Pi(e^{(1)}, ..., e^{(n)}) = K_1$ e che

$$\begin{aligned}
\Pi(e^{(1)} + e^{(2)}, e^{(2)}, ..., e^{(n)}) &= \{x_1 e^{(1)} + (x_1 + x_2)e^{(2)} + \cdots \ , \ 0 \le x_i \le 1\} \\
&= \{x_1 e^{(1)} + y e^{(2)} + \cdots \ , \ 0 \le x_1 \le 1 \ , \ x_1 \le y \le 1 + x_1 \ , ...\} \\
&= \{x_1 e^{(1)} + y e^{(2)} + \cdots \ , \ 0 \le x_1 \le 1 \ , \ x_1 \le y \le 1 \ , ...\} \cup \\
&\quad\ \{x_1 e^{(1)} + (1+y) e^{(2)} + \cdots \ , \ 0 \le x_1 \le 1 \ , \ 0 \le y \le x_1 \ , ...\} \\
&= D_2 \cup \Big(e^{(2)} + D_1\Big) =: D_2 \cup D_3
\end{aligned} \tag{4.84}$$

Si ricordi anche che, se $T = [v^{(1)}, ..., v^{(n)}]$, $Te^{(i)} = v^{(i)}$ e che, per ogni $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$, $AT = [Av^{(1)}, ..., Av^{(n)}]$ e $A\Pi(T) = \Pi(AT)$. Quindi,

$$\begin{aligned}
&\Pi(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) = TK_1 = TD_1 \cup TD_2 \ , \\
&\Pi(v^{(1)} + v^{(2)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) = \Pi\Big(Te^{(1)} + Te^{(2)}, Te^{(2)}, ..., Te^{(n)}\Big) \\
&\qquad = \Pi\Big(T(e^{(1)} + e^{(2)}, e^{(2)}, ..., e^{(n)})\Big) \\
&\qquad = T\Pi(e^{(1)} + e^{(2)}, e^{(2)}, ..., e^{(n)}) \\
&\qquad = TD_2 \cup TD_3 \\
&\qquad = TD_2 \cup (v^{(2)} + TD_1) \ .
\end{aligned}$$

Quindi, poiché $\mathrm{mis}(TD_1 \cap TD_2) = 0$ e $\mathrm{mis}(TD_2 \cap TD_3) = 0$ (essendo $x \to Tx$ derivabile) e poiché la misura è invariante per traslazioni, si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{mis}\,\big(\Pi(v^{(1)} + v^{(2)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)})\big) &= \mathrm{mis}(TD_2) + \mathrm{mis}(TD_1) \\
&= \mathrm{mis}(TD_1 \cup TD_2) \\
&= \mathrm{mis}\,\big(\Pi(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)})\big) \ ,
\end{aligned}$$

il che dimostra (4.82) nel caso $\det T > 0$; poiché $\det[v^{(1)} + v^{(2)}, v^{(2)}, ...] = \det[v^{(1)}, v^{(2)}, ...]$, il caso $\det T < 0$ segue immediatamente. Combinando (4.82) con la proprietà 1) si ottiene

$$\Delta(v^{(1)} + v^{(j)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) = \Delta(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \tag{4.85}$$

per ogni $2 \le j \le n$. Sia ora a un numero diverso da 0. Allora da (4.80) (con $j = 2$) e da (4.82), si ottiene

$$\begin{aligned}
\Delta(v^{(1)} + av^{(2)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) &= \frac{1}{a}\Delta(v^{(1)} + av^{(2)}, av^{(2)}, ..., v^{(n)}) \\
&= \frac{1}{a}\Delta(v^{(1)}, av^{(2)}, ..., v^{(n)}) \\
&= \Delta(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \ .
\end{aligned} \tag{4.86}$$

Naturalmente per $a = 0$, l'uguaglianza tra il primo e l'ultimo membro di (4.86) è banalmente vera. Usando ancora la proprietà 1), otteniamo, per ogni $2 \le j \le n$, e per ogni $a \in \mathbb{R}$,

$$\Delta(v^{(1)} + av^{(j)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) = \Delta(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \ ; \tag{4.87}$$

da tale relazione segue facilmente che, per ogni a_j,

$$\Delta(v^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} a_j v^{(j)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) = \Delta(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \ , \tag{4.88}$$

che equivale alla (4.81) nel caso in cui w appartenga allo spazio generato da $\{v^{(j)}, j \geq 2\}$. Naturalmente se $v^{(2)}, ..., v^{(n)}$ sono linearmente dipendenti (4.81) è banalmente vera, essendo entrambi i membri a sinistra e destra dell'uguaglianza nulli. Assumiamo dunque $w =: v^{(1)}$, $v^{(2)}, ..., v^{(n)}$ linearmente indipendenti, cosicché $v^{(1)}, ..., v^{(n)}$ forma una base in $\mathbb{R}^n$. Allora esistono n costanti a_i tali che $v = \sum_{i=1}^n a_i v^{(i)}$ ed usando (4.87) ed (4.75),

$$\begin{aligned}
&\Delta(v + w, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \\
&\quad = \Delta(\sum_{i=1}^{n} a_i v^{(i)} + v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \\
&\quad = \Delta((1 + a_1)v^{(1)} + \sum_{i=2}^{n} a_i v^{(i)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \\
&\quad = \Delta((1 + a_1)v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \\
&\quad = (1 + a_1)\Delta(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \\
&\quad = \Delta(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) + \Delta(a_1 v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \\
&\quad = \Delta(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) + \Delta(a_1 v^{(1)} + \sum_{i=2}^{n} a_i v^{(i)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)})\big) \\
&\quad = \Delta(v, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) + \Delta(w, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \ .
\end{aligned}$$

Questo completa la dimostrazione della proprietà 2) e quindi, per quanto discusso sopra, vale (4.67).

Sia ora R il rettangolo $[0, b_1] \times \cdots \times [0, b_n]$ con $b_n > 0$. Allora $R = \Lambda K_1$ dove $\Lambda = \mathrm{diag}\,(b_1, ..., b_n)$ e quindi

$$\begin{aligned}
\mathrm{mis}(TR) \ &= \mathrm{mis}\,\big(T(\Lambda K_1)\big) = \mathrm{mis}\,\big((T\Lambda)K_1\big) = |\det(T\Lambda)| \\
&= |\det T|\ |\det \Lambda| = |\det T|(b_1 b_2 \cdots b_n) = |\det T|\,\mathrm{mis}(R) \ .
\end{aligned}$$

E poiché, se $a = (a_1, ..., a_n)$,

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = a + [0, b_1 - a_1] \times \cdots \times [0, b_n - a_n]$$

dall'invarianza della misura per traslazione segue che

$$\mathrm{mis}(TR) = |\det T|\,\mathrm{mis}(R) \tag{4.89}$$

per ogni rettangolo in $\mathbb{R}^n$. ∎

Dimostrazione (del Teorema 4.3). Sia $\delta(x) := |\det \phi'(x)|$. Dividiamo la dimostrazione di (4.62) in quattro passi:

(1) per ogni cubo chiuso $D \subseteq A$, vale

$$\mathrm{mis}(\phi(D)) = \int_D \delta(x) dx \ . \tag{4.90}$$

(2) la formula (4.90) vale anche se D è un qualunque insieme misurabile contenuto in A.
(3) per ogni insieme elementare $D \subseteq A$ si ha che

$$\int_{\phi(D)} f = \int_D f \circ \phi \ \delta \ . \tag{4.91}$$

(4) vale (4.61) (e quindi (4.62)).

(1) Sia D un cubo chiuso contenuto in A. Possiamo scrivere per ogni $x \in D$ ed ogni h tale che $x_0 + h \in D$

$$\phi(x_0 + h) = \phi(x_0) + \phi'(x_0)h + \theta(h, x_0) \tag{4.92}$$

con

$$\theta(h, x_0) := \Big[\int_0^1 \Big(\phi'(x_0 + th) - \phi'(x_0)\Big) dt\Big] h \tag{4.93}$$

(si noti che D è un insieme convesso e quindi il segmento $\{x_0 + th : t \in [0,1]\}$ è interamente contenuto in D). Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $s > 0$ tale che

$$|\delta(x) - \delta(y)| \le \varepsilon \ , \quad \Big\|\phi'(x) - \phi'(y)\Big\| \le \varepsilon \tag{4.94}$$

per ogni $x, y \in D$ tali che $|x - y| \le s$. Da (4.94) e (4.93) segue che, per ogni $x \in D$, $x + h \in D$ con $|h| \le s$

$$|\theta(h, x)| \le |h|\varepsilon \ . \tag{4.95}$$

Sia P una partizione di D in cubi di lato r con $r \le s$. Introduciamo la seguente notazione: indichiamo con $K_\rho(x)$ il cubo chiuso di lato ρ centrato in x ovvero:

$$K_\rho(x) := \{y : \ |y - x| \le \frac{\rho}{2}\} \ . \tag{4.96}$$

Dimostriamo che esiste una costante $c_1 > 0$ indipendente da ε tale che, per ogni cubo $K = K_r(x_0)$ della partizione $\mathscr{R}$,

$$TK_{r(1-c_1\varepsilon)}(y_0) \subseteq \phi(K) \subseteq TK_{r(1+c_1\varepsilon)}(y_0) \ , \tag{4.97}$$

dove $T := \phi'(x_0)$ e $y_0 = T^{-1}\phi(x_0)$. Riscriviamo la (4.97) come

$$K_{r(1-c_1\varepsilon)}(y_0) \subseteq T^{-1}\phi(K) \subseteq K_{r(1+c_1\varepsilon)}(y_0) \ . \tag{4.98}$$

Poiché la mappa $x \to T^{-1}\phi(x)$, su $D = \overline{D} \subseteq A$, è continua, invertibile ed aperta, per il lemma 4.4 si ha che

$$\partial\Big(T^{-1}\phi(K)\Big) = T^{-1}\phi(\partial K) \ . \tag{4.99}$$

Se $x \in \partial K$, cioè, se $x = x_0 + h$ con $|h| = \frac{r}{2}$, usando (4.92) (moltiplicata per T^{-1}), si ottiene

$$\begin{aligned} |T^{-1}\phi(x) - y_0| \ &= |h + T^{-1}\theta| \\ &\ge |h| - |T^{-1}\theta| = \frac{r}{2} - |T^{-1}\theta| \\ &\ge \frac{r}{2}(1 - \|T^{-1}\| \, \varepsilon) \end{aligned} \tag{4.100}$$

dove, nell'ultima disuguaglianza abbiamo usato (4.95). Se poniamo

$$c_1 = \ \sup_D \Big\|\big(\phi'\big)^{-1}\Big\| \tag{4.101}$$

otteniamo che un punto sulla frontiera di $T^{-1}\phi(K)$ ha distanza (in norma del massimo $|\cdot|$) *almeno* $\frac{r}{2}(1-c_1\varepsilon)$ da y_0 e quindi

$$K_{r(1-c_1\varepsilon)}(y_0) \subseteq T^{-1}\phi(K)\ .$$

Analogamente, se x è un punto di K, e quindi $x = x_0 + h$ con $|h| \le \frac{r}{2}$,

$$\begin{aligned} |T^{-1}\phi(x) - y_0| &= |h + T^{-1}\theta| \\ &\le |h|(1+c_1\varepsilon) \le \frac{r}{2}(1+c_1\varepsilon)\ , \end{aligned} \tag{4.102}$$

ovvero vale anche la seconda inclusione di (4.98).

Sia $\varepsilon > 0$ e s come in (4.94). Dimostriamo che esiste una costante c_2 (indipendente da ε) tale che, per ogni cubo $K = K_r(x_0) \subseteq D$ con $r \le s$, si ha

$$\Big|\delta(x_0)\,\mathrm{mis}\,(K) - \mathrm{mis}\,(\phi(K)\Big| = \Big|\,\mathrm{mis}\,(\phi'(x_0)\,K)\ -\ \mathrm{mis}\,(\phi(K)\Big| \le c_2\,\varepsilon\ \mathrm{mis}(K)\ . \tag{4.103}$$

La prima uguaglianza è conseguenza del Lemma 4.6. Ora, assumiamo (senza perdere generalità) che $\varepsilon < 1$ e $c_1\varepsilon < 1$ ed osserviamo che dalla formula del binomio di Newton segue che

$$\begin{aligned} &1 = (1 - c_1\varepsilon + c_1\varepsilon)^n \le (1-c_1\varepsilon)^n + \bar c\varepsilon\ , \qquad \bar c := c_1 \sum_{j=1}^n \binom{n}{j}\ , \\ &1 = (1 + c_1\varepsilon - c_1\varepsilon)^n \ge (1+c_1\varepsilon)^n - \bar c\varepsilon\ . \end{aligned}$$

Quindi, se poniamo $y_0 := (\phi'(x_0))^{-1}\phi(x_0)$ e $c_2 := \bar c\,\sup_A|\det\phi'(x)|$, si ha che

$$\begin{aligned} \mathrm{mis}\,(\phi'(x_0)\,K) &= |\det\phi'(x_0)|\,r^n \\ &\le |\det\phi'(x_0)|\,\Big(r(1-c_1\varepsilon)\Big)^n + c_2\,\varepsilon\,r^n \\ &= |\det\phi'(x_0)|\ \mathrm{mis}\,(K_{r(1-c_1\varepsilon)}(y_0)) + c_2\,\varepsilon\ \mathrm{mis}(K) \\ &= \mathrm{mis}\,(\phi'(x_0)\,K_{r(1-c_1\varepsilon)}(y_0)) + c_2\,\varepsilon\ \mathrm{mis}(K) \\ &\le \mathrm{mis}\,\Big(\phi(K)\Big) + c_2\,\varepsilon\ \mathrm{mis}(K)\ . \end{aligned}$$

In modo del tutto analogo si ottiene

$$\mathrm{mis}\,(\phi'(x_0)\,K) \ge \mathrm{mis}\,\Big(\phi(K)\Big) - c_2\,\varepsilon\ \mathrm{mis}(K)$$

e, dunque, la validità di (4.103).

Ora, sia $\varepsilon > 0$ arbitrario e s come sopra e sia P una qualunque partizione del cubo D con $\mathscr{R}(P)$ formata da cubi R_j di lato $r \le s$ e centro $x^{(j)}$. Allora, per (4.94) e (4.103), si ha

$$\begin{aligned} \Big|\int_D \delta - \mathrm{mis}(\phi(R))\Big| &= \Big|\sum_j \int_{R_j}\delta - \sum_j \mathrm{mis}(\phi(R_j))\Big| \\ &\le \sum_j \Big|\int_{R_j}\delta\ - \delta(x^{(j)})\,\mathrm{mis}(R_j)\Big| \\ &\qquad + \sum_j \Big|\delta(x^{(j)})\,\mathrm{mis}(R_j) - \mathrm{mis}(\phi(R_j))\Big| \\ &\le \varepsilon\sum_j \mathrm{mis}(R_j) + c_2\varepsilon\sum_j \mathrm{mis}(R_j) \\ &\le \mathrm{mis}(A)(1+c_2)\,\varepsilon\ . \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ε segue la (4.90) con D cubo chiuso in A.

(2) Sia R un qualunque rettangolo chiuso contenuto in A, sia $\varepsilon > 0$ e siano K_j cubi come in 4.2.10. Siano $R_1 := \cup_j K_j$ e $R_2 = R \backslash R_1$. Allora[22], per **(1)**,

$$\int_{R_1} \delta = \sum_{i=1}^{N} \int_{K_i} \delta = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{mis}(\phi(K_i)) = \mathrm{mis}(\phi(R))$$

da cui

$$\begin{aligned} \Big| \int_R \delta - \mathrm{mis}(\phi(R)) \Big| &= \Big| \int_{R_2} \delta - \mathrm{mis}(\phi(R_2)) \Big| \\ &\leq \Big(\sup_A \delta + L^n + 1 \Big)\, \varepsilon \ . \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ε segue la (4.90) vale con $D = R$ rettangolo chiuso contenuto in A. Se $D \subseteq A$ è un insieme elementare, la (4.90) segue poiché D è unione di rettangoli chiusi che hanno in comune al più insiemi di misura zero. Infine se $D \subseteq A$ è un insieme misurabile la (4.90) si ottiene approssimando dall'interno D con insiemi elementari.

(3) Sia $D \subseteq A$ un insieme elementare e siano E ed E' due rettangoli standard tali che $D \subseteq E$ e $C := \phi(D) \subseteq E'$. Dimostriamo innanzitutto che $f \circ \phi$ è integrabile su D. Si noti che

$$(f \circ \phi)_D = f_C \circ \phi \ ; \qquad \chi_{_R} \circ \phi = \chi_{_{\phi^{-1}(R)}} \ . \tag{4.104}$$

Poiché f è integrabile su[23] C, per 4.2.15, esistono due funzioni a scalini $s_1 \leq f_C \leq s_2$ con $s_i = \sum c_j^{(i)} \chi_{_{R_j}}$ tali che $\int_{E'} (s_2 - s_1) \leq \varepsilon$. Siano $g_i := s_i \circ \phi = \sum_j c_j^{(i)} \chi_{_{\phi^{-1}(R_j)}}$: tali funzioni sono integrabili su E, $g_1 \leq f_C \circ \phi = (f \circ \phi)_D \leq g_2$ e, per 4.2.14 (applicata a $F = \phi^{-1}$), si ha

$$\begin{aligned} \int_E g_2 - g_1 &= \sum_j \big(c_j^{(2)} - c_j^{(1)} \big)\, \mathrm{mis}\, \big(\phi^{-1}(R_j) \big) \\ &\leq M^n \sum_j \big(c_j^{(2)} - c_j^{(1)} \big)\, \mathrm{mis}(R_j) \\ &= M^n \int_E s_2 - s_1 \leq M^n \varepsilon \ , \end{aligned}$$

dove M è la costante di Lipschitz di ϕ^{-1} su[24] C. L'integrabilità di $f \circ \phi$ su D (ossia, l'integrabilità di $(f \circ \phi)_D$ su E) segue ora da 4.2.15–(iii).
Dunque, anche $(f \circ \phi)_D\ \delta_D$ è integrabile su E. Sia ora P' una qualunque partizione di E' così fine che i rettangoli che intersecano C (ossia i rettangoli in $\mathscr{R}_C(P')$) siano contenuti in B dove è definita ϕ^{-1} e cosicché l'unione degli $\phi^{-1}(R)$ al variare di R in $\mathscr{R}_C(P')$ ricoprono

[22] Gli R_j hanno in comune al più insieme di misura zero; ϕ è un diffeomorfismo e, per 4.2.14, manda insieme con misura nulla in insiemi con misura nulla.

[23] Per ipotesi f è integrabile su $B = \phi(A)$ e quindi è integrabile su qualunque sottoinsieme misurabile di B.

[24] Si ricorda che se $F \in C^1(E, \mathbb{R}^m)$ con $E \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso e convesso allora F è uniformemente Lipschitziana su E con costante di Lipschitz (rispetto alle norme del sup) $\max_E \|F'\|$ (come deriva immediatamente dal teorema della media integrale: $F(x) - F(y) = \big[\int_0^1 F(y + t(x-y))dt\big](x-y)$. Si ricorda anche che dal teorema della funzione inversa ϕ^{-1} è C^1 su B.

D. Ora, ricordando (4.104), si ha che

$$\begin{aligned}
\int_D f\circ\phi\;\delta &= \int_E (f\circ\phi)_D\;\delta_D\\
&= \sum_{R\in\mathscr{R}_C(P')}\int_{\phi^{-1}(R)}(f\circ\phi)_D\;\delta_D\\
&\le \sum_{R\in\mathscr{R}_C(P')}\big(\sup_{\phi^{-1}(R)}(f\circ\phi)_D\big)\int_{\phi^{-1}(R)}\delta\\
&= \sum_{R\in\mathscr{R}_C(P')}(\sup_R f_C)\,\mathrm{mis}(R)\\
&= \overline{S}(f_C,P')
\end{aligned}$$

dove nella penultima uguaglianza si è usato il punto **(2)** con D sostituito da $\phi^{-1}(R)$. Prendendo l'estremo inferiore su tutte le partizioni P' di E', segue che

$$\int_D f\circ\phi\;\delta \le \int_C f\ .$$

La disuguaglianza inversa si dimostra in maniera del tutto analoga.

(4) Poiché A è misurabile, la sua frontiera è misurabile ed ha misura nulla. Quindi, fissato $\varepsilon>0$, esiste un insieme elementare $G\supseteq\partial A$ di misura minore di ε. Definendo $D:=A\backslash G$ (che è un sottoinsieme elementare di A per cui vale la (4.91)) si ha che

$$\begin{aligned}
\Big|\int_A f\circ\phi\;\delta-\int_B f\Big| &= \Big|\int_{A\backslash D} f\circ\phi\;\delta-\int_{\phi(A\backslash D)} f\Big|\\
&\le \int_{A\backslash D}|f\circ\phi|\;\delta+\int_{\phi(A\backslash D)}|f|\\
&\le \sup_B|f|(\sup_A\delta+L^n)\,\mathrm{mis}(A\backslash D)\\
&\le \sup_B|f|(\sup_A\delta+L^n)\,\mathrm{mis}\,G\\
&\le \sup_B|f|(\sup_A\delta+L^n)\;\varepsilon\ ,
\end{aligned}$$

e dall'arbitrarietà di ε segue (4.61). ∎

4.5 Le funzioni integrabili secondo Riemann

Il resto di questo capitolo è dedicato a rendere rigorosa l'affermazione fatta all'inizio di 4.1.11. Fondamentale a tale scopo è la nozione di insieme di misura nulla.

Definizione 4.7 *Un insieme $Q\subseteq\mathbb{R}^n$ si dice di misura nulla se per ogni $\varepsilon>0$ esiste una famiglia numerabile di rettangoli aperti $\{R_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ tale che*[25]

$$Q\subseteq\bigcup_{j\ge1}R_j\ ,\qquad \text{e}\qquad \sum_{j\ge1}\mathrm{mis}(R_j)\le\varepsilon\ . \tag{4.105}$$

[25] Normalmente, una famiglia (non necessariamente numerabile) di insiemi aperti, la cui unione contenga un insieme Q, si chiama un *ricoprimento (aperto) di Q*; si ricorda che $\mathbb{Z}_+$ denota l'insieme degli interi positivi $\{1,2,3,...\}$.

Osservazione 4.8 **(i)** Si noti, che non si è richiesto che Q sia limitato *né tantomeno che Q sia misurabile secondo Peano–Jordan*. Sia infatti Q un *qualunque insieme numerabile e denso*[26] *in* $\mathbb{R}^n$; si può prendere, ad esempio, l'insieme $Q = \mathbb{Q}^n$ dei punti $x \in \mathbb{R}^n$ a componenti razionali. Poiché Q è numerabile $Q = \{r_j\}_{j\geq 1}$. Scegliamo ora R_j come il cubo aperto centrato in r_j di lato $(\varepsilon j^{-2})^{\frac{1}{n}}$. Allora $\mathrm{mis}(R_j) = \varepsilon j^{-2}$ e

$$\sum_{j\geq 1} \mathrm{mis}(R_j) \leq (\sum_{j\geq 1} \frac{1}{j^2})\ \varepsilon\ , \tag{4.106}$$

il che è chiaramente equivalente a dire che Q è di misura nulla. D'altra parte Q non è limitato né, per lo stesso motivo visto sopra[27], è misurabile $Q \cap E$ qualunque sia il rettangolo E.
(ii) Ovviamente *un sottoinsieme di un insieme di misura nulla è di misura nulla.*
(iii) *Un'unione numerabile di insiemi di misura nulla è di misura nulla.*
Dimostrazione Sia $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ una famiglia numerabile di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ di misura nulla e sia $\varepsilon > 0$. Allora per ogni $j \geq 1$ esisono rettangoli aperti $R_i^{(j)}$ tali che $Q_j \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{Z}_+} R_i^{(j)}$ e $\sum_{i\geq 1} \mathrm{mis}\, R_i^{(j)} \leq \varepsilon 2^{-j}$. La famiglia $\{R_i^{(j)}\}_{i,j\in\mathbb{Z}_+}$, come è ben noto, è numerabile ed una numerazione può essere fatta come segue: definiamo $R_1 := R_1^{(1)}$ e, per ogni $r \geq 1$, definiamo[28] $R_{r^2+1} := R_{r+1}^{(1)}$, $R_{r^2+2} := R_{r^2+1}^{(2)}$,...,$R_{r^2+r+1} := R_{r+1}^{(r+1)}$, $R_{r^2+r+2} := R_r^{(r+1)}$,...,$R_{r^2+2r+1} := R_1^{(r+1)}$. Si noti che secondo tale numerazione, per ogni $N \geq 1$, $\{R_1,...,R_{N^2}\} := \{R_j^{(i)} : 1 \leq i,j \leq N\}$.

Allora, per ogni $N \geq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{N} \mathrm{mis}\, R_r &\leq \sum_{r=1}^{N^2} \mathrm{mis}\, R_r = \sum_{i,j\leq N} \mathrm{mis}\, R_j^{(i)} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \mathrm{mis}\, R_j^{(i)} \\ &\leq \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{mis}\, R_j^{(i)} \leq \sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^j} \leq \varepsilon\ . \quad \blacksquare\end{aligned}$$

(iv) A volte è utile, nella definizione di insieme di misura nulla, sostituire i rettangoli con cubi; vale infatti la seguente affermazione:

Un insieme $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ è di misura nulla se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento numerabile di Q fatto da cubi aperti la somma delle cui misure non eccede ε.

Per dimostrare tale affermazione osserviamo innanzitutto che

dato un qualunque rettangolo limitato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e dato comunque $\sigma > 0$ è possibile ricoprire E con un numero finito di cubi aperti la cui somma non ecceda[29] $\mathrm{mis}\, E + \sigma$. Sia ora $\varepsilon > 0$.

[26] Si ricordi che un insieme $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **denso in** $\mathbb{R}^n$ se la sua chiusura $\overline{Q}$ coincide con tutto $\mathbb{R}^n$. Analogamente, se C è un insieme chiuso di $\mathbb{R}^n$, si dice che $Q \subseteq C$ è denso in C se la sua chiusura coincide con C.

[27] E cioè che in ogni rettangolo R di una qualunque partizione di E cadono sia punti di Q (essendo Q denso in E), sia punti di $E\backslash Q$ (si ricordi che ogni intervallo di numeri reali è non numerabile).

[28] La seguente numerazione corrisponde alla numerazione di $\{(i,j) \in \mathbb{Z}_+^2\}$ fatta considerando i quadrati di vertici $(1,1)$, $(r+1,1)$, $(r+1,r+1)$ e $(1,r+1)$ e numerando successivamente i lati "esterni" nel verso che va da $(r+1,1)$ a $(r+1,r+1)$ e poi da $(r+1,r+1)$ a $(1,r+1)$.

[29] Sia infatti $E = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_n,b_n]$ (i casi in cui E non è chiuso derivano banalmente dal caso in cui E è chiuso); sia $\delta = \sigma/(2nL^{n-1})$ dove $L = \max(b_i - a_i)$; sia $k_i = [(b_i - a_i)\delta^{-1}] + 1$ (dove $[\cdot]$ denota la funzione "parte intera"); sia, infine, $b_i' = a_i + \delta k_i$. Allora $E' = [a_1,b_1'] \times \cdots \times [a_n,b_n'] \supseteq E$ e $\mathrm{mis}\, E' \leq \mathrm{mis}\, E + n\delta L^{n-1} \leq \mathrm{mis}\, E + \sigma/2$. Sia, ora, P la partizione di E' con $P_i = \{a_i + j\delta$ con $0 \leq j \leq k_i\}$. Chiaramente $\mathscr{R}(P')$ è formata da cubi di lato δ che denoteremo $\widetilde{K}_i$ per $i = 1,...,N =$ cardinalità di $\mathscr{R}(P')$. Siano $K_i(r)$ i cubi aperti con lo stesso centro di $\widetilde{K}_i$ e lato $\delta + r$ cosicché $\overline{K_i(0)} = \widetilde{K}_i$. Ovviamente per ogni $r > 0$ $E \subseteq E' \subseteq \bigcup_i K_i(r)$ e la funzione $f(r) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{mis}\, K_i(r)$ è una funzione continua di r e $f(0) = \mathrm{mis}\, E' \leq \mathrm{mis}\, E + \sigma/2$. Dunque esiste r_0 tale che per ogni $0 \leq r \leq r_0$ si ha $f(r) \leq \mathrm{mis}\, E + \sigma$ e l'asserto si ottiene prendendo $K_i = K_i(r)$ per un qualunque $0 < r < r_0$.

Poichè Q è di misura nulla esiste un ricoprimento numerabile di rettangoli aperti R_j la somma delle cui misure non eccede $\varepsilon/2$. Per ogni j siano $K_1^{(j)}$,...,$K_{N_j}^{(j)}$ cubi aperti che ricoprono R_j e la somma delle cui misure non ecceda $\mathrm{mis}(R_j)+\varepsilon/2^{j+1}$. Allora l'insieme dei cubi $\{K_i^{(j)}\}$, con $j\geq 1$ e $1\leq i\leq N_j$, è un insieme numerabile e l'unione di tali cubi ricopre Q ed inoltre

$$\sum_{j\geq 1}\sum_{i=1}^{N_j}\mathrm{mis}\left(K_i^{(j)}\right)\leq\sum_{j\geq 1}\mathrm{mis}(R_j)+\varepsilon\sum_{j\geq 1}\frac{1}{2^{j+1}}\leq\varepsilon\ . \quad \blacksquare$$

La 4.2.14 si estende facilmente agli insiemi di misura nulla non necessariamente misurabili secondo Peano–Jordan. Vale infatti la seguente

Proposizione 4.9 *Sia $Q\subseteq\mathbb{R}^n$ un insieme di misura nulla e sia $F:Q\to\mathbb{R}^n$ una funzione uniformemente lipschitziana su Q. Allora $F(Q)$ è un insieme di misura nulla.*

Dimostrazione Per il punto (iv) dell'osservazione precedente esiste un ricoprimento di cubi aperti, $\{K_j\}$, di Q per cui $\sum\mathrm{mis}\,K_j\leq\varepsilon$ e possiamo assumere che $K_j\cap Q\neq\emptyset$ per ogni j (altrimenti eliminiamo semplicemente K_j). Fissiamo un $x^{(j)}\in K_j\cap Q$ e chiamiamo r_j il lato di K_j cosicché $\mathrm{mis}(K_j)=r_j^n$. Definiamo K_j' il cubo aperto di centro $F(x^{(j)})$ e lato $r_j':=2Lr_j$, dove L è la costante di Lipschitz di F su Q rispetto la norma $|\cdot|_\infty$ su $\mathbb{R}^n$, cioè: $|F(x)-F(y)|_\infty\leq L|x-y|_\infty$ per ogni $x,y\in Q$. Allora $F(K_j\cap Q)\subseteq K_j'$, infatti se $x\in K_j\cap Q$, si ha che $|x-x^{(j)}|_\infty\leq r_j$ e quindi $|F(x)-F(x^{(j)})|\leq L|x-x^{(j)}|\leq(Lr_j)=r_j'/2$, ovvero $F(x)\in K_j'$. Quindi $\{K_j'\}$ è un ricoprimento di $F(Q)$: se $y\in F(Q)$ allora esiste $x\in Q$ tale che $y=F(x)$, ma, poiché Q è ricoperto dai cubi K_j, esisterà un cubo K_{j_0} che contiene x, ma allora K_{j_0}' contiene y. Inoltre

$$\sum_j\mathrm{mis}(K_j')=\sum(2Lr_j)^n=(2L)^n\sum r_j^n=(2L)^n\sum\mathrm{mis}(K_j)\leq(2L)^n\varepsilon\ , \tag{4.107}$$

e dall'arbitrarietà di ε segue l'asserto. $\blacksquare$

L'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann può essere ora completamente caratterizzato[30].

Teorema 4.10 *Una funzione $f:E\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ (E rettangolo standard di $\mathbb{R}^n$) è integrabile secondo Riemann su E se e solo se l'insieme dei punti di E in cui f è discontinua è un insieme di misura nulla.*

Dimostrazione Chiamiamo $D(f)$ l'insieme dei punti di E in cui f è discontinua ed osserviamo che se $Q_j:=\{x\in E:\ \mathrm{osc}\,(f,x)\geq 1/j\}$ allora $D(f)=\cup_j Q_j$. Ricordando il punto (iii) dell'Osservazione 4.8, è sufficiente dunque dimostrare:
"*f è integrabile su E $\iff$ Q_j è un insieme di misura nulla per ogni j*".
Si noti che Q_j è chiuso (e quindi, essendo $Q_j\subseteq E$, è compatto).
Dimostriamo "$\Longrightarrow$": Siano $j,\varepsilon>0$ allora esiste una partizione P di E tale che $\sum_{R\in\mathscr{R}}\mathrm{osc}\,(f,R)\,\mathrm{mis}\,R\leq\varepsilon/j$. Sia $\tilde{\mathscr{R}}:=\{R\in\mathscr{R}:R\cap Q_j\neq\emptyset\}$ (cosicché, se $R\in\tilde{\mathscr{R}}$ allora $\mathrm{osc}\,(f,R)\geq 1/j$). Allora

$$\sum_{R\in\tilde{\mathscr{R}}}\mathrm{mis}\,R=j\sum_{R\in\tilde{\mathscr{R}}}\frac{\mathrm{mis}\,R}{j}\leq j\sum_{R\in\tilde{\mathscr{R}}}\mathrm{osc}\,(f,R)\,\mathrm{mis}\,R\leq\varepsilon\ .$$

[30] In effetti tale descrizione è stata fatta alquanto dopo i contributi di Riemann ed è essenzialmente basata sulla moderna teoria dell'integrazione dovuta a Lebesgue, Vitali, Caratheodory etc.

Se $N := \#\tilde{\mathscr{R}}$, prendendo dei rettangoli aperti $K_R \supseteq R$ tali che $\operatorname{mis} K_R \le \operatorname{mis} R + \varepsilon/N$ si ha che $Q_j \subseteq \bigcup_{R\in\tilde{\mathscr{R}}} K_R$ e $\sum_{R\in\tilde{\mathscr{R}}} \operatorname{mis} K_R \le 2\varepsilon$. Dunque Q_j è un insieme di misura nulla.
Dimostriamo ora "$\Longleftarrow$": Sia $\varepsilon > 0$ e sia $j > 2/\varepsilon$ e sia $Q := Q_j$. Poiché Q è di misura nulla esiste un ricoprimento numerabile di Q formato da cubi aperti K_i tali che $\sum \operatorname{mis} K_i \le \varepsilon$. Essendo Q compatto esistono $K_{i_1},\dots,K_{i_s}$ che ricoprono Q (e ovviamente $\sum_{j=1}^s \operatorname{mis} K_{i_j} \le \varepsilon$). Sia D la chiusura di $(E\setminus \bigcup_{j=1}^s K_{i_j})$. Per ogni $x \in D$ si ha $\operatorname{osc}(f,x) \le 1/j < \varepsilon/2$. Per ogni $x \in D$ sia $C(x)$ un cubo chiuso di centro x tale che $\operatorname{osc}(f,x) \le \varepsilon$ (l'esistenza di tali cubi deriva dalla definizione di oscillazione e dal fatto che $\operatorname{osc}(f,x) < \varepsilon/2$). Chiaramente $\bigcup_{x\in D} \mathring{C}(x) \supseteq D$ e quindi esistono $C_1,\dots,C_N$, con $C_i := C(x^{(i)})$ per qualche $x^{(i)} \in D$, tali che $D \subseteq \mathring{C}_1 \cup \cdots \cup \mathring{C}_N$. Sia P la partizione di E tale che P_i contanga la i–esima coordinata di tutti i vertici dei K_{i_j} e degli C_i. Chiaramente se chiamiamo $\mathscr{R}_1 := \{R \in \mathscr{R} : R \subseteq C_i \text{ per qualche } i\}$ e $\mathscr{R}_2 := \{R \in \mathscr{R} : R \subseteq K_{i_j} \text{ per qualche } j\}$, si ha $\mathscr{R} = \mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2$. Allora $\sum_{R\in\mathscr{R}_2} \operatorname{mis} R \le \varepsilon$ e

$$\begin{aligned}\sum_{R\in\mathscr{R}} \operatorname{osc}(f,R) \operatorname{mis} R &\le \sum_{R\in\mathscr{R}_1} \operatorname{osc}(f,R)\operatorname{mis} R + \sum_{R\in\mathscr{R}_2} \operatorname{osc}(f,R)\operatorname{mis} R \\ &\le \varepsilon \operatorname{mis} E + 2\sup_E |f|\ \varepsilon\ . \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Una conseguenza immediata di questo risultato, di 4.2.2 e del fatto che l'insieme di discontinuità di χ_B coincide con la frontiera di B è la seguente

Proposizione 4.11 *Un insieme limitato di $\mathbb{R}^n$ è misurabile secondo Peano–Jordan se e solo sela sua frontiera è un insieme di misura nulla.*

Concludiamo questo capitolo con *un esempio di una funzione sul cubo unitario* $K := [0,1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ *il cui insieme di discontinuità coincida con* $K \cap \mathbb{Q}^n$. Sia $\{r_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+} = K \cap \mathbb{Q}^n$ e sia $f : K \to [0,1]$ la funzione che vale zero se $x \in K\setminus\mathbb{Q}^n$ e $f(r_j) = 1/j$. Chiaramente $\operatorname{osc}(f,x) = 1/j > 0$. Facciamo vedere che f è continua in ogni $x \in K\setminus\mathbb{Q}^n$ $(:= \{x \in K : f(x) = 0\})$. Sia $\varepsilon > 0$; sia $j_0 > 1/\varepsilon$ e sia $\delta := \max_{1\le j\le j_0} |x - r_j|$ (poiché $x \notin \mathbb{Q}^n$, $\delta > 0$). Se $x' \in B_\delta(x)$ o $x' \notin \mathbb{Q}^n$, nel qual caso $|f(x') - f(x)| = 0$, oppure $x' \in \mathbb{Q}^n$, nel qual caso $x = r_j$ per qualche $j \ge j_0$, e quindi $|f(x') - f(x)| = 1/j \le 1/j_0 < \varepsilon$.

4.6 *Esercizi e complementi*

E 4.1 Si dimostrino le seguenti proprietà del diametro: (i) $\operatorname{diam} A = 0$ se e solo se A è costituito da un solo punto. (ii) A è limitato se e solo il suo diametro è finito.
(iii) Si calcoli il diametro di $A := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0|_p < r\}$ per $1 \le p \le \infty$.

E 4.2 Sia $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ la funzione che vale 1 se $x_1 \ne 1/2$ e, per $x_1 = 1/2$ la funzione $x_2 \in [0,1] \to f(1/2, x_2)$ vale 1 se x_2 è irrazionale e 0 se x_2 è razionale. Si dimostri che f è integrabile su $[0,1]^2$ (mentre, come sappiamo, $x_2 \in [0,1] \to f(1/2, x_2)$ non è integrabile su $[0,1]$).

E 4.3 L'ipotesi che f sia integrabile su B nella proposizione 4.1 non può essere rimossa, anche se assumessimo che $g(x)$ fosse integrabile su E. Si consideri, infatti, la seguente funzione $f : K \to \mathbb{R}$ con $K := [0,1]^2$

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} 1\ , & \text{se } x_1 \in [0,1] \text{ è irrazionale}\ ,\\ 2x_2 & \text{se } x_1 \text{ è razionale}\ .\end{cases} \tag{4.108}$$

La funzione $x_2 \to f(x_1,x_2)$ coincide o con la funzione costante 1 o con $2x_2$ che sono entrambe funzioni integrabili su $[0,1]$ ed inoltre

$$\int_0^1 f(x_1,x_2)dx_2 = 1\ , \qquad \forall\ x_1 \in [0,1]\ .$$

Dunque anche $g(x) := g(x_1) := 1$ è una funzione integrabile. D'altra parte (esercizio)

$$\sup \underline{S}_K(f,P) = \frac{3}{4}\ , \qquad \inf \overline{S}_K(f,P) = \frac{5}{4}\ . \tag{4.109}$$

E 4.4 (Un esempio di insieme aperto non misurabile secondo Peano–Jordan) Sia Q l'insieme di tutti i punti a coordinate razionali nel cubo unitario $[0,1]^n$. Sia $c>0$; sia $\{r_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ una numerazione di Q [ovvero $Q=\{r_j : j\geq 1 \text{ e } j \text{ intero}\}$]; sia B_j la sfera aperta di centro r_j e raggio c/j^2 e sia B l'insieme aperto $B := \cup_{j\in\mathbb{Z}_+} B_j$.

(i) Si faccia vedere che $\operatorname{mis\,est} B \geq 1$.
(ii) Si faccia vedere che $\operatorname{mis\,int} B \leq 2c\sum j^{-2}$ e si concluda che, se c è sufficientemente piccola, $\operatorname{mis\,int} B < \operatorname{mis\,est} B$ e che quindi B non è misurabile secondo Peano–Jordan.

E 4.5 * **(Curva di Peano)** *Esiste una funzione continua* $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *tale che* $\varphi([0,1]) = Q := [0,1]\times[0,1]$ ossia esiste una "curva" che ricopre un quadrato.
Se $I := [0,1]\times\{0\}$ denota il segmento unitario immerso in $\mathbb{R}^2$ e se, per ogni $(x,y)\in I$, definiamo $f(x,y)=\varphi(x)$, vediamo che $f\in C(I,\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{mis}_2(I)=0$ ma $\operatorname{mis}_2(f(I)) = \operatorname{mis}_2([0,1]^2)=1$.

Si completino i dettagli del seguente schema di dimostrazione:
1) Sia K un quadrato di lato di lunghezza ℓ e lo si suddivida in quattro quadrati di lato $\ell/2$. Si fissi un lato L di K e su di esso si fissi un punto M a distanza $\ell/4$ da uno dei vertici di L e si fissi un altro lato L' di K diverso da L. Si faccia vedere che esiste una ed una sola poligonale[31] di lunghezza 2ℓ, che passi per i centri dei quattro quadrati in cui è stato suddiviso K e con estremi M ed N dove N è un punto su L' a distanza $\ell/4$ da uno dei suoi due estremi.
2) Sia $a<b$. Si "parametrizzi" su $[a,b]$ una qualunque poligonale in $\mathbb{R}^n$ ossia, se gli estremi della poligonale hanno coordinate x e y, si trovi una funzione $\gamma : t\in[a,b]\to\gamma(t)\in\mathbb{R}^n$ tale che $\gamma(a)=x$, $\gamma(b)=y$ e tale che l'insieme $\{\gamma(t) : a\leq t\leq b\}$ coincida con la poligonale data. [Suggerimento: un segmento di estremi x e z è parametrizzato su $[a,b]$ da $\gamma(t) = x + \frac{t-a}{b-a}(y-x)$.]
3) La funzione (o "curva") φ sarà ottenuta come limite (uniforme) di funzioni continue $\varphi_k : [0,1]\to Q$. Ogni φ_k sarà una parametrizzazione di una poligonale chiusa che passa per ogni centro dei 2^{2k} quadrati di lato 2^{-k} in cui si divide Q. Denoteremo con Γ_k la poligonale parametrizzata da φ_k, cioè $\Gamma_k := \{\varphi_k(t) : 0\leq t\leq 1\}$. *Primo passo*: si divida Q in quattro quadrati di lato $1/2$ e sia Γ_1 la poligonale formata dai quattro segmenti che uniscono i centri dei quattro quadrati. *Secondo passo*: Si consideri il quadrato Q_1^1 di lato $1/2$ di centro $(\frac14,\frac34)$ e sia $\Gamma_1^1 := \Gamma_1\cap Q_1^1$. Si divida Q_1^1 in quattro quadrati di lato $1/4$ (che chiameremo Q_2^1,...,Q_2^4) ed usando il punto 1) si costruisca una poligonale Γ_2^1 che passi per i quattro centri di Q_2^j con estremi a distanza $1/8$ dai due punti in $\Gamma_1^1\cap Q_1^1$: vi sono infatti due poligonali con tali proprietà e per eliminare tale ambiguità si scelga quella con uno degli estremi in $(\frac12,\frac78)$. Si divida Q in 16 quadrati di lato $1/4$, Q_2^j, $j=1,...,16$. Iterando il procedimento sopra descritto si costruisca la poligonale chiusa Γ_2 che passi per tutti i 16 centri dei Q_2^j (e per il punto $(\frac12,\frac78)$: $\Gamma_2^1 = \Gamma_2\cap Q_1^1$ *etc.*). *Terzo passo:* si generalizzi il procedimento descritto sopra e per ogni k si costruisca una poligonale chiusa, Γ_k, che passi per i 2^{2k} centri dei quadrati di lato 2^{-k} in cui è possibile suddividere Q. Tale costruzione è unica se si impone che la poligonale passi anche per il punto $(\frac12, 1-\frac{1}{2^{k+1}})$.
4) Si parametrizzi Γ_k tramite $\varphi_k(t)$ in modo tale che $\varphi_k(\frac{j}{2^{k+1}})$ coincida, per ogni $j=1,...,2^{2k}$, con il centro di Q_k^j (si noti che Γ_k dà un ordine ai quadrati di lato 2^{-k} per i cui centri passa).
5) Si dimostri che per ogni $0\leq t\leq 1$ vale $|\varphi_k(t)-\varphi_{k+1}(t)| \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ e da questo si deduca che $\varphi_k(t)$ converge uniformemente: il limite $\varphi(t)$ sarà dunque una funzione continua da $[0,1]$ in Q (e $\varphi(0) = (\frac12, 1))$.
6) Si dimostri che φ è surgettiva su Q cioè $\varphi([0,1])=Q$.
7) φ è anche iniettiva? [Risposta: no]

[31] Una "poligonale" in $\mathbb{R}^n$ è l'unione di $N\geq 1$ segmenti aventi come estremi coppie di punti $(x^{(1)},x^{(2)})$, $(x^{(2)},x^{(3)})$,...,$(x^{(N)},x^{(N+1)})$.

E 4.6 (Integrali impropri I) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme *non limitato*. Supponiamo che per ogni $r > 0$, l'insieme $A_r := A \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$ sia misurabile. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e supponiamo che f sia integrabile su A_r per ogni $r > 0$.

Definizione 4.12 *Se esiste finito il limite*

$$\lim_{r\to\infty} \int_{A_r} |f| < \infty \tag{4.110}$$

si dice che f è integrabile su A e si pone

$$\int_A f = \lim_{r\to\infty} \int_{A_r} f \ . \tag{4.111}$$

(i) Si controlli che tale definizione è ben posta.
(ii) Dire se $f = e^{-|x|}$ è integrabile su $\mathbb{R}^n$ (nel senso della definizione appena data) e, in caso affermativo, si stimi $\int_{\mathbb{R}^n} f$.
[Suggerimento: si noti che $\exp(-|x|) \leq \exp(-\frac{1}{\sqrt{n}}|x|_1)$.]
(iii) Sia $n = 2$ e $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq 1\}$. Si dica se è integrabile su A la funzione $f = x_1^{100}(\cos x_2)(1+|x_2|)^{-\frac{3}{2}}$ e, in caso affermativo, si stimi $\int_A f$.

E 4.7 (Integrali impropri II) Sia A un insieme misurabile in $\mathbb{R}^n$ e sia $\bar{x} \in A$. Sia $A' := A \backslash \{\bar{x}\}$ e sia $f : A' \to \mathbb{R}$. Sia B_r una sfera di raggio r centrata in $\bar{x}$. Supponiamo che f sia integrabile su $A'_r := A \backslash B_r$ per ogni $r > 0$.

Definizione 4.13 *Se esiste finito il limite*

$$\lim_{r\to 0} \int_{A'_r} |f| < \infty \tag{4.112}$$

si dice che f è integrabile su A e si pone

$$\int_A f = \lim_{r\to 0} \int_{A'_r} f \ . \tag{4.113}$$

(i) Si controlli che tale definizione è ben posta.
(ii) Sia A la sfera unitaria in $\mathbb{R}^n$ per $n \leq 3$, $\bar{x} = 0$ e $f = \frac{1}{|x|^\alpha}$. Dire per quali α, f è integrabile su A e per tali α stimare $\int_A f$.
(iii)* Svolgere il punto (ii) nel caso di n arbitrario.

E 4.8 Si dimostri che 1) e 2) di (4.64) impicano che Δ è lineare rispetto al j–esimo vettore, con j arbitrario.

E 4.9 Si dimostri che se $\Delta = \Delta(v^{(1)}, ..., v^{(n)})$ è una funzione definita su n–nuple di vettori in $\mathbb{R}^n$ che verifica (4.64), allora $\Delta(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) = \det[v^{(1)}, ..., v^{(n)}]$.

E 4.10 Sia $R := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ e si dimostri che $R = \cup K_j$ con K_j cubi chiusi tali che $m(K_i \cap K_j) = 0$ se $i \neq j$.

E 4.11 Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $\phi \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$. Dimostrare che ϕ è invertibile con inversa C^1 se e solo se ϕ è iniettiva e $\det \phi' \neq 0$ su A.

E 4.12 Sia $F(y)$ la trasformazione inversa della ϕ del Teorema 4.3 cioè

$$F : y \in B := \phi(A) \to x = F(y) \in A \ . \tag{4.114}$$

(i) Dimostrare che la coppia B e F verifica le ipotesi del Teorema 4.3.
(ii) Dimostrare che se g è una funzione integrabile su $A = F(B)$, allora si ha

$$\int_A g(x)dx = \int_B g \circ F(y) \cdot \big|\det \frac{\partial F}{\partial y}(y)\big| dy \ . \tag{4.115}$$

E 4.13 (Coordinate polari in $\mathbb{R}^2$) Sia $B := (0, R) \times (0, 2\pi)$ e $F : B \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$F : (\rho, \theta) \in B \to x = (\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta) \ . \tag{4.116}$$

(i) Dimostrare che F e B verificano le ipotesi del Teorema 4.3 e calcolare, in particolare, lo jacobiano $\frac{\partial F}{\partial y}$ ed il suo determinante (qui $y := (\rho, \theta)$).
(ii) Si definisca e si discuta la trasformazione inversa ϕ.
(iii) Qual è l'immagine, secondo F, di un rettangolino $[r, r+s] \times [\theta, \theta + \sigma]$?

E 4.14 (i) Si dimostri che

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \tag{4.117}$$

(ii) Si dimostri che

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \pi^{\frac{n}{2}} \ . \tag{4.118}$$

E 4.15 Per ogni $m \in \mathbb{N}$, si calcoli $I_m := \displaystyle\int_0^\infty x^m e^{-x^2} dx$.

E 4.16 Sia $A := B'_R := \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < R\}$ e sia

$$\phi(x) := (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2) \ .$$

(i) Si dimostri che $\delta := |\det \phi'| > 0$ per ogni $x \in A$ ma che

$$\int_A \delta \ dx = 2\pi R^4$$
$$\phi(A) = B'_{R^2} \qquad \Longrightarrow \qquad m(\phi(A)) = \pi R^4 \ .$$

(ii) Si spieghi perchè non vale la tesi del Teorema 4.3.
(iii) Si trovi un insieme A' su cui, invece, valga la tesi del Teorema 4.3.

E 4.17 (Coordinate polari in $\mathbb{R}^3$) Sia $B := (0, R) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ e $F : B \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$F : (\rho, \theta, \psi) \in B \to x = (\rho \cos\theta \operatorname{sen}\psi, \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi, \rho\cos\psi) \ . \tag{4.119}$$

(i) Dimostrare che F e B verificano le ipotesi del Teorema 4.3 e calcolare, in particolare, lo jacobiano $\frac{\partial F}{\partial y}$ ed il suo determinante (qui $y := (\rho, \theta, \psi)$).
(ii) Si definisca e si discuta la trasformazione inversa ϕ.

E 4.18 (Coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$) Sia $B := (0, R) \times (0, 2\pi) \times (-h, h)$ e $F : B \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$F : (\rho, \theta, z) \in B \to x = (\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta, z) \ . \tag{4.120}$$

(i) Dimostrare che F e B verificano le ipotesi del Teorema 4.3 e calcolare, in particolare, lo jacobiano $\frac{\partial F}{\partial y}$ ed il suo determinante (qui $y := (\rho, \theta, z)$).
(ii) Si definisca e si discuta la trasformazione inversa ϕ.

E 4.19 (Solidi di rotazione in $\mathbb{R}^3$) Sia $E_0 \subseteq (0, \infty) \times \mathbb{R}$ un insieme misurabile di $\mathbb{R}^2$ e α un numero in $(0, 2\pi]$. Si dimostri che

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = \rho\cos\theta, \ y = \rho \operatorname{sen}\theta, \ \text{ con } (\rho, z) \in E_0 \ , \ \text{ e } \theta \in [0, \alpha]\}$$

è un insieme misurabile in $\mathbb{R}^3$ e se ne calcoli il volume in termini di un integrale doppio su E_0.

E 4.20 Si calcoli il volume del toro solido ottenuto ruotando un disco di raggio r attorno ad un asse a distanza $R > r$ dal centro del disco.