Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM 120

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. L.Chierchia

Tutori: Vincenzo Morinelli, Emanuele Padulano

1. Trovare la derivata delle seguenti funzioni usando il limite del rapporto incrementale:

   (a) $f_1(x) = \tan(x)$

   Soluzione:
   Ricordando che $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ si ha:

$$\begin{aligned} f_1'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\tan(x)+\tan(h)}{1-\tan(x)\tan(h)}-tan(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\tan(h)+\tan^2(x)\tan(h)}{h(1-\tan(x)\tan(h))} \\ &= (1+\tan^2(x))\lim_{h\to 0}\frac{tan(h)}{h}\frac{1}{1-\tan(x)\tanh} = 1+\tan^2 x \end{aligned}$$

   (b) $f_2(x) = \cos(x^n)$

   Soluzione Ricordando la formula di prostaferesi:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} f_2'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos[(x+h)^n]-\cos[x^n]}{h} &= \lim_{h\to 0} -\frac{2}{h}\sin\left[\frac{(x+h)^n+x^n}{2}\right]\sin\left[\frac{(x+h)^n-x^n}{2}\right] \\ &= -\sin(x^n)\lim_{h\to 0}\frac{2}{(x+h)^n-x}\sin\left[\frac{(x+h)^n-x^n}{2}\right]\frac{(x+h)^n-x^n}{2} \\ &= -\sin(x^n)\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}x^k h^{n-k}-x^n}{h} \\ &= -\sin(x^n)\begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix}x^{n-1} = -nx^{n-1}\sin(x^n) \end{aligned}$$

2. Mostrare un esempio per ognuno dei seguenti quesiti:

   - Una funzione continua ma non derivabile in un punto.

     Soluzione

$$f(x) = |x|$$

     è continua ma non derivabile in 0 visto che $\lim_{h\to 0^\pm}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \pm 1$

   - Una funzione derivabile in un punto la cui derivata non è derivabile nello stesso punto

<u>Soluzione</u>

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Ha derivata

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

ma questa non è derivabile in 0

- Una funzione il cui limite del rapporto incrementale in zero esiste ma non è finito.

  <u>Soluzione</u>

  $$f(x) = \sqrt{x}$$

  Infatti

  $$\lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{h}}{h} = +\infty$$

- Una funzione il cui limite del rapporto incrementale non esiste.

  <u>Soluzione</u>

  $$f(x) = |x|$$

3. Fissato $\alpha > 1$ sia f definita $\forall x \in \mathbb{R}$ tale che

   $$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha$$

   $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
   Mostrare che f è costante.

   <u>Soluzione</u> Da $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha$ troviamo

   $$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq |x - y|^{\alpha - 1}$$

   Applicando il teorema dei carabinieri si ottiene

   $$0 \leq \lim_{y \to x} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq \lim_{y \to x} |x - y|^{\alpha - 1} = 0$$

   cioè $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ne segue che f è costante.

4. Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $\beta > 0$ definiamo in $[-1, 1]$ la funzione

   $$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x^\beta}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

   Mostrare che:

- f è continua se e solo se $\alpha > 0$
- $f'(0)$ esiste se e solo se $\alpha > 1$
- f' è limitata se e solo se $\alpha \geq 1+\beta$
- f' è continua se e solo se $\alpha > 1+\beta$

Soluzione

- f è continua se $\lim_{x\to 0} x^\alpha \sin\frac{1}{x^\beta} = 0$, cioè se $\alpha > 0$
- $f'(0)$ esiste se $\lim_{h\to 0} h^{\alpha-1} \sin\frac{1}{h^\beta}$ esiste finito cioè se $\alpha > 1$ e in questo caso $\lim_{h\to 0} h^{\alpha-1} \sin\frac{1}{h^\beta} = 0$
-
$$f'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x^\beta} - \beta x^{\alpha-\beta-1}\cos\frac{1}{x^\beta} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
. Questa è limitata se e solo se $\alpha \geq 1+\beta$
- $f'(x)$ è continua se
$$\lim_{x\to 0} \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x^\beta} - \beta x^{\alpha-\beta-1}\cos\frac{1}{x^\beta} = 0$$
cioè se $\alpha > 1+\beta$

5. Fra tutti i rettangoli con vertici su un' ellisse di semiassi a, b trovare quello di area massima.
Soluzione Ricordando l'equazione cartesiana dell'ellisse:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
un rettangolo inscritto nell'ellisse avrà vertici:
$$P_1 = (x,y),\ P_2 = (-x,y),\ P_3 = (-x,-y),\ P_4 = (x,-y)$$
dove $x \in [0,a]$,e dall'equazione dell'ellisse $y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$.
L'area di tale rettangolo sarà pertanto
$$A(x) = 4bx\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$
Calcolando la derivata della funzione area avremo:
$$A'(x) = 4b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} - 4bx\frac{\frac{2x}{a^2}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$$

cercando i punti critici di A, i candidati massimo e minimo della funzione area, imponiamo la condizione $A'(x) = 0$ e

$$\begin{array}{rcl} 0 = \quad A'(x) & = & \frac{4b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-4b\frac{x^2}{a^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \\ \Leftrightarrow \qquad 0 & = & 4b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-4b\frac{x^2}{a^2} \\ \Leftrightarrow \qquad x & = & \frac{a}{\sqrt{2}} \end{array}$$

essendo $A(0) = A(a) = 0$, e da $A(x) > 0$, $A \neq 0$ per $x \in (0, a)$, il rettangolo di semilato orizzontale $\frac{a}{\sqrt{2}}$ è quello di area massima

6. Mostrare le disuguaglianze

$$x + \frac{x^3}{6} < \sin x < x$$

per ogni $x > 0$.

Soluzione Consideriamo la funzione $f(x) = x - \sin x$ si ha che $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, $\forall x > 0$. Segue che f è strettamente crescente e

$$\sin x < x$$

.
Consideriamo $g(x) = \sin x - x - \frac{x^3}{6}$, $g(0) = 0$, $g'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} \geq 0$ per $x > 0$. Segue che g è strettamente crescente e

$$x + \frac{x^3}{6} < \sin x$$

7. utilizzando la disuguaglianza di convessità mostrare le seguenti disuguaglianze:

- $$(x+y)^p \leq 2^{p-1}(x^p + y^p)$$

- $$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{x^q}{q}$$

  per $x, y > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p, q > 0$

Soluzione

- da $f(t) = t^p$ per $p \geq 1$ convessa abbiamo la disuguaglianza

  $$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \qquad 0 \leq \lambda \leq 1 \tag{1}$$

  cioè per $\lambda = \frac{1}{2}$:

  $$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}x^p + \frac{1}{2}y^p \Leftrightarrow (x+y)^p \leq 2^{p-1}(x^p + y^p)$$

- da $g(t) = e^t$ funzione convessa e da $xy = e^{\frac{1}{p}\log x^p} e^{\frac{1}{q}\log x^q}$ per $\lambda = \frac{1}{p}$ la disuguaglianza di convessità (1) fra $\log x^p$ e $\log x^q$ diventa:

$$xy = e^{\frac{1}{p}\log x^p + \frac{1}{q}\log x^q} \leq \frac{1}{p} e^{\log x^p} + \frac{1}{q} e^{\log x^q} = \frac{x^p}{p} + \frac{x^q}{q}$$

8. Calcolare i seguenti limiti usando i teoremi di De L'Hopital:

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}$
- $\lim_{x\to+\infty} \left(x\cos\frac{1}{\sqrt{x}} - x^2 \sin\frac{1}{x}\right)$

Soluzione

- essendo la forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ possiamo usare il teorema di De l'Hopital e:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \tfrac{e^{\sqrt{x}}}{x^2} &\overset{\text{teo De l'Hopital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \tfrac{e^{\sqrt{x}}}{4x\sqrt{x}} \\
&\overset{\text{teo De l'Hopital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \tfrac{e^{\sqrt{x}}}{6x} \\
&\overset{\text{teo De l'Hopital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \tfrac{e^{\sqrt{x}}}{12\sqrt{x}} \\
&\overset{\text{teo De l'Hopital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \tfrac{e^{\sqrt{x}}}{12} = +\infty
\end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \left(x\cos\tfrac{1}{\sqrt{x}} - x^2\sin\tfrac{1}{x}\right) &\overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to+0} \tfrac{1}{y}\cos\sqrt{y} - \tfrac{1}{y^2}\sin y \\
&\overset{\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1}{=} \lim_{y\to+0} \tfrac{1}{y}\cos\sqrt{y} - \tfrac{1}{y} \\
&\overset{\text{teo De l'Hopital}}{=} \frac{-\sin\sqrt{y}}{2\sqrt{y}} \\
&\overset{\text{teo De l'Hopital}}{=} \frac{-\cos\sqrt{y}}{2} = -\tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

9. Calcolare lo sviluppo al quarto ordine delle seguenti funzioni

- $\ln(\cos x)$
- $\frac{1}{e^x}$

Soluzione

- Ricordando che: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$,$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2+o(x^2)}$ si ha:

$$\begin{aligned}
ln(\cos x) &= \ln\left(1 - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) \\
&= -\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{4!} + o(x^4) - \left(-\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)^2 + o(\left(-\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)^2) \\
&= -\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{12} + o(x)^4
\end{aligned}$$

- Ricordando che $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$ si ha:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e^x} &= \frac{1}{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)} \\
&= 1 - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) + \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)^2 \\
&\quad - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)^3 + \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)^4 + o(x^4) \\
&= 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{3} - x^3 - \frac{3x^4}{2} + x^4 + o(x^4) \\
&= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)
\end{aligned}$$

10. Trovare lo sviluppo di Taylor delle seguenti funzioni:

- $f(x) = 3^{2x}$
- $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^3}}$

Soluzione

- Osserviamo che

$$f^n(x) = (2\ln 3)^n 3^{2x}$$

e

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2\ln 3)^n}{n!} x^n$$

- Osservando che

$$g^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k} (1+x)^{-\frac{(2k-1)}{2}}$$

troviamo che

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} x^k = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{4-x^3}} = \frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt[3]{4}}\right)^3}} = 1 + 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k-1)!!}{4^k (2k)!!} x^{3k}$$

11. Calcolare i seguente limiti usando gli sviluppi di Taylor:

- $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x(\cos(5\tan x) - \cos(5\sin x)) + 5x^4}{2x^4 + \sin(x^5) - x^6}$$

Soluzione Ricordando che

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

e gli sviluppi di $\cos x$ e sin x avremo :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to0^+} \frac{\cos x(\cos(5\tan x)-\cos(5\sin x))+5x^4}{2x^4+\sin(x^5)-x^6} &=\\
&\lim_{x\to0^+} \frac{\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1-\frac{1}{2}(5(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)))^2-(1-\frac{1}{2}(5(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)))^2)\right)+5x^4}{2x^4+x^5+o(x^5)} &=\\
&\lim_{x\to0^+} \frac{\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(-\frac{50}{6}x^4-\frac{50}{12}x^4+o(x^4)\right)+5x^4}{2x^4+x^5+o(x^5)} &=\\
&\lim_{x\to0^+} \frac{-\frac{15}{2}x^4+o(x^4)}{2x^4+x^5+o(x^5)} = -\frac{15}{4}
\end{aligned}$$

- $$\lim_{x\to0^+} \frac{\sin x^3 - \sin^3 x}{x^3\left(\cos x^3 - \cos^3 x\right)}$$

  Soluzione:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to0^+} \frac{\sin x^3-\sin^3 x}{x^3(\cos x^3-\cos^3 x)} &=\\
&\lim_{x\to0^+} \frac{\left(x^3-\frac{x^9}{3!}+o(x^9)\right)-\left(x^3-\frac{x^9}{6^3}+3x^2\left(-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\right)+3\frac{x^7}{6^2}-\frac{x^9}{5!}+o(x^9)\right)}{x^3\left(\left(1-\frac{x^6}{2!}+o(x^9)\right)-\left(1-\frac{x^6}{2^3}+3\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\right)-3\frac{x^4}{2^2}-\frac{x^6}{2!4!}\right)\right)} &=\\
&\lim_{x\to0} \frac{\frac{x^5}{2}+o(x^5)}{\frac{3}{2}x^5+o(x^5)} &=\\
&\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

12. Calcolare con un ordine inferiore a 10^{-6}, $\sinh 1$

    Soluzione:
    Dalla formula di Taylor in 0 del $\sinh x$, si ha che:

    $$\sinh x = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{k!}x^i + R_n(0,x)$$

    dove $f^{(2i)}(0) = \sinh(0) = 0$, $f^{(2i+1)}(0) = \cosh(1) = 1$ per $i \geq 0$ e dalla formula del resto di Lagrange

    $$R_n(x,0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad \xi \in [0,x].$$

    Per $x = 1$ vogliamo stimare il resto inferiore a 10^{-6} quindi sapendo che le derivate di $\sinh x$ sono $|f^{(2i+1)}(x)| = |\cosh(x)| \leq 3$, $|f^{(2i)}(x)| = |\sinh(x)| \leq 3$ per $0 \leq x \leq 1$ avremo

    $$|R_n(1,0)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| \leq \frac{3}{(n+1)!} \leq 10^{-6}$$

    per n=9. Quindi, per avere un approssimazione di $\sinh 1$ con errore inferiore a 10^{-6} ci basta calcolare lo sviluppo di Taylor in 0 del sinh fino all'ordine 9 e valutarlo in 1.

    $$\sin 1 \approx 1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} = 1,175201...$$

13. Svolgere il seguente integrale
$$\int \frac{1}{1+x^4}\,dx$$

Soluzione:

x^4+1 non é un polinomio con radici reali, ma nonostante questo si spezza in $\mathbb{R}$ nel prodotto di due polinomi di secondo grado. Di fatto ponendo

$$x^4+1=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=x^4+(a+c)x^3+(b+d+ac)x^2+(ad+bc)x+bd$$

e risolvendo il sistema che ne consegue otteniamo che

$$x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

Pertanto
$$\int \frac{1}{1+x^4}\,dx=\int \frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}\,dx$$

Essendo ora i due polinomi al denominatore irriducibili, procediamo, come da teoria ,ponendo :

$$\frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}=\ldots=$$
$$=\frac{(A+C)x^3+(B+D+\sqrt{2}(C-A))x^2+(A+C+\sqrt{2}(D-B))x+B+D}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}$$

Risolvendo il sistema che ne consegue si ha che :

$$A=\frac{1}{2\sqrt{2}};\quad B=\frac{1}{2};\quad C=-\frac{1}{2\sqrt{2}};\quad D=\frac{1}{2}$$

Quindi :

$$\int \frac{1}{1+x^4}\,dx=\int \frac{\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx+\int \frac{\frac{1}{2}-\frac{x}{2\sqrt{2}}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx=I_1+I_2$$

$$I_1=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{2x+2\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx=$$
$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx+\frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx=$$
$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\log(x^2+\sqrt{2}x+1)+\frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx$$

Risolviamo singolarmente

$$\int \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx$$

. Essendoci al denominatore un polinomio di secondo grado irriducibile, la soluzione sará del tipo $k \arctan(f(x))$, ma perché cosí sia dovremmo scriverci il denominatore nella forma $1 + f(x)^2$. Per fare ció la procedura standard é la seguente: sia $f(x) = x + c$ (nel caso in cui il polinomio non sia monico, ma del tipo $ax^2 + bx + d$ sará $f(x) = \sqrt{a}x + c$) allora $f(x)^2 = (x + c)^2 = x^2 + 2cx + c^2$.
Consideriamo il coefficiente di grado 1:
per essere quello di $f(x)$ equivalente a quello del polinomio che abbiamo al denominatore dovrá essere $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$; sostituendo tale c in $f(x)$ otteniamo che $f(x) = x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{2}$, quindi $x^2 + \sqrt{2}x + 1 = (x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}$.
Dunque

$$\int \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\,dx = \int \frac{1}{(x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= 2\int \frac{1}{2(x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 1}\,dx = \frac{2}{\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}x + 1)^2 + 1}\,dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x + 1)$$

Pertanto

$$I_1 = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x + 1).$$

Analogamente

$$I_2 = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x - 1).$$

In conclusione:

$$\int \frac{1}{1 + x^4}\,dx = I_1 + I_2 + c \quad .$$

14. Dimostrare che

$$\int_0^{\pi} \cos^{2n} x\,dx = \int_0^{\pi} \sin^{2n} x\,dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi$$

<u>Soluzione:</u>

$$\int_0^{\pi} \cos^{2n} x\,dx = \int_0^{\pi} \cos^{2n-1} x \cos x\,dx$$

Usiamo la formula di integrazione per parti: ponendo $f'(x) = \cos x$ e
$g(x) = \cos^{2n-1} x$, otteniamo che $f(x) = \sin x$ e $g'(x) = -(2n-1)\sin x \cos^{2n-2} x$.
Pertanto (essendo $f(\pi) = f(0) = 0$) si ha che

$$\int_0^\pi \cos^{2n} x\,dx = (2n-1)\int_0^\pi \cos^{2n-2} x \sin^2 x\,dx =$$

$$= (2n-1)\int_0^\pi \cos^{2n-2} x(1-\cos^2 x)\,dx =$$

$$= (2n-1)\int_0^\pi \cos^{2n-2} x\,dx - (2n-1)\int_0^\pi \cos^{2n} x\,dx.$$

Ponendo

$$A = \int_0^\pi \cos^{2n} x\,dx$$

abbiamo dunque ottenuto l'uguaglianza

$$A = (2n-1)\int_0^\pi \cos^{2n-2} x\,dx - (2n-1)A$$

Perció si ha che

$$A = \frac{2n-1}{2n}\int_0^\pi \cos^{2n-2} x\,dx,$$

cioé

$$\int_0^\pi \cos^{2n} x\,dx = \frac{2n-1}{2n}\int_0^\pi \cos^{2n-2} x\,dx.$$

Iterando, dopo n passi avremo che:

$$\int_0^\pi \cos^{2n} x\,dx = \frac{(2n-1)}{(2n)}\frac{(2n-3)}{(2n-2)}\cdots\frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^{2n-2n} x\,dx =$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_0^\pi dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi.$$

Per verificare

$$\int_0^\pi \sin^{2n} x\,dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi$$

si procede nella stessa identica maniera.