

**Test 1 – 15/10/2010**

**N.B.** • Indicare in cima all'elaborato: nome, cognome, data di nascita, n. matricola (o n. documento).

- Il punteggio totale è in centesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.
- È **vietato**: parlare, scambiarsi informazioni; consultare testi, appunti, etc.; l'uso del cellulare, calcolatrici, etc.
- Le risposte vanno sempre motivate chiaramente e sinteticamente! **Risposte senza giustificazioni non danno punteggio.**
- **Attenzione:** è obbligatorio svolgere il primo esercizio.

**Es 1 [Pt. 30]** (i) Enunciare i seguenti assiomi dei numeri reali: (SP), (SO), (PO) e (ES).

(ii) Dimostrare (indicando in ogni passaggio gli assiomi usati) che  $-a = (-1) \cdot a$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$ .

(iii) Definire le funzioni  $[x]$  e  $|x|$ .

(iv) Definire  $\mathbb{Q}$  e dimostrare che se  $r, s \in \mathbb{Q}$ , allora  $rs \in \mathbb{Q}$ .

(v) Dimostrare che se  $s = \sup A$  e  $t < s$  allora esiste  $x \in A$  tale che  $t < x$ .

**Es 2 [Pt. 15]** Definire  $\mathbb{Z}$  e dimostrare che se  $n, m \in \mathbb{Z}$  allora  $n + m \in \mathbb{Z}$ .

**Es 3 [Pt. 15]** Enunciare il “principio di induzione” e dimostrare per induzione che  $n^n \geq n!$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Es 4 [Pt 15]** Trovare l'insieme dei numeri reali che soddisfa la disuguaglianza

$$2|x + 2| < x + 3 .$$

**Es 5 [Pt. 25]** Determinare, qualora esistano, gli estremi superiori ed inferiori, specificando se si tratta di massimo o minimo, dei seguenti insiemi:

$$A = \{y \in \mathbb{R} : y = x^{10} + x^4 - 4 \text{ con } x \in \mathbb{N}\} , \quad B = \{y \in \mathbb{R} : y = x^{10} + x^4 - 4 \text{ con } x \in \mathbb{Z}\} ,$$

$$C = \{y \in \mathbb{Q} : y = x^{10} + x^4 - 4 \text{ con } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\} , \quad D = \{x = \sqrt{2} + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\} ,$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq [x]\} .$$