

Esonero 2 – 21/1/2011

- N.B.** • Indicare in cima all'elaborato: nome, cognome, data di nascita, n. matricola (o n. documento).
• Il punteggio totale è in centesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.
• È vietato: parlare, scambiarsi informazioni; consultare testi, appunti, etc.; l'uso del cellulare, calcolatrici, etc.
• Le risposte vanno sempre motivate chiaramente e sinteticamente! **Risposte senza giustificazioni non danno punteggio.**
• **Attenzione:** è obbligatorio svolgere il primo esercizio.

- Es 1 [Pt. 25]** (i) Dare la definizione (per serie) di seno, coseno, seno iperbolico e coseno iperbolico. Enunciare il teorema di permanenza del segno per il coseno e dare la definizione di π .
(ii) Dimostrare che una successione di Cauchy è limitata.
(iii) Dare la definizione di punto di accumulazione, di insieme derivato e di frontiera. Qual è la frontiera dell'insieme $\{2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$?
(iv) Dimostrare che il prodotto di funzioni continue è continuo.
(v) Dare la definizione di funzione uniformemente continua su $(0, 1)$. Dimostrare che se f è uniformemente continua su $(0, 1)$ allora è limitata.

- Es 2 [Pt. 15]** (i) Dare un esempio di insieme chiuso, non compatto che non sia unione finita di intervalli chiusi.
(ii) Dare un esempio di insieme né chiuso né aperto che non sia un intervallo.
(iii) Trovare la chiusura, l'interno e la frontiera dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : \cos x < 1/2\} \cup \mathbb{Z}$.

Es 3 [Pt. 18] Calcolare i seguenti limiti

$$(i) \lim(\sqrt{n} - \sqrt{2n}) \sinh(\log(1 + 1/\sqrt{n})); \quad (ii) \lim \frac{2^{n^2}}{n!}$$
$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x[x]}.$$

- Es 4 [Pt. 12]** (i) Trovare tre sottosuccessioni con limiti diversi di $a_n = n \sin\left(\frac{\pi n}{10^5}\right)$.
(ii) Calcolare il limsup e liminf di $b_n = (-1)^n + \tanh((-1)^n n)$.

Es 5 [Pt. 30] Studiare la convergenza delle seguenti serie (al variare, se appare, del parametro reale x):

$$(i) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{10}}{(\log n)^{\log n}}; \quad (ii) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n + xn}{2^n + n^3};$$
$$(iii) \sum_{n=1}^{\infty} 3^n (1 - \cos(e^{-n})).$$