

## Esonero 1 – 8/11/2010

- N.B.** • *Indicare in cima all'elaborato: nome, cognome, data di nascita, n. matricola (o n. documento).*
- *Il punteggio totale è in centesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.*
  - **È vietato:** *parlare, scambiarsi informazioni; consultare testi, appunti, etc.; l'uso del cellulare, calcolatrici, etc.*
  - *Le risposte vanno sempre motivate chiaramente e sinteticamente!*
  - **Risposte senza giustificazioni non danno punteggio.**
  - **Attenzione:** *è obbligatorio svolgere il primo esercizio.*

- Es 1 [Pt. 25]** (i) Enunciare tutti gli assiomi dei numeri reali dove compare la relazione ' $\leq$ '.  
(ii) Dire se è corretto il seguente enunciato:  $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ . Eventualmente correggere l'enunciato e dimostrarlo (indicando in ogni passaggio gli assiomi usati).  
(iii) Dire cosa significa  $\lim a_n = -\infty$ . Dimostrare che se  $\lim a_n = -\infty$  (e  $a_n \neq 0$ ) allora  $\lim 1/a_n = 0$ .  
(iv) Definire  $\mathbb{N}$  e dimostrare il "principio di induzione".  
(v) Dimostrare che l'estremo superiore dell'insieme  $\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$  è 1.

**Es 2 [Pt. 20]** Trovare il sup e l'inf di  $A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 3} \leq 1 - x\}$  e  $B = \{-2^n + 2n : n \in \mathbb{N}\}$

**Es 3 [Pt. 10]** Dimostrare che la successione  $a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$  è crescente. Qual è il suo limite?

**Es 4 [Pt 15]** Sia  $a_n = \frac{\sqrt{n} - 1}{2n^2 + \sqrt{157}}$ . Calcolare  $L = \lim a_n$ . Trovare un  $N \in \mathbb{N}$  tale che  $|a_n - L| < 10^{-10}$ , per ogni  $n \geq N$ .

**Es 5 [Pt. 30]** Calcolare i limiti delle seguenti successioni:

- (i)  $\frac{(n+1)(n-5)}{\sqrt{2}n^2 - 5}$  ,      (ii)  $\frac{2^n - (\sqrt{5})^n}{n^{20} + (4/3)^n}$  ,      (iii)  $(\sqrt[n]{n} - 1)^n$  ,  
(iv)  $\sqrt{n}(\sqrt{n+6} - \sqrt{n+2})$  ,      (v)  $n^2 \frac{n!}{n^n}$  ,      (vi)  $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)^n$  .