Primo Esonero – 3/11/2009

N.B. • *Indicare in cima all'elaborato da consegnare: nome, cognome, data di nascita, n. matricola (o n. documento).*
• *Il punteggio totale è in centesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.*
• *È* **vietato***: parlare, scambiarsi informazioni; consultare testi, appunti, etc.; l'uso del cellulare, calcolatrici, etc.*
• *Le risposte vanno sempre motivate chiaramente e sinteticamente!* **Risposte senza giustificazioni non danno punteggio**.

Es 1 [Pt. 10] Dimostrare che $0 \cdot x = 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, indicando, in ogni passaggio, quale assioma dei numeri reali viene usato.

Es 2 [Pt. 10] (i) Dare la definizione di maggiorante e di estremo superiore.
(ii) Dimostrare che se A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente e se s è il suo estremo superiore, allora, per ogni $y < s$ esiste $x \in A$ tale che $x > y$.

Es 3 [Pt. 15] Trovare l'insieme delle x che verifica la disuguaglianza:

$$\frac{1}{1-x} < 1 + |x| \ .$$

Es 4 [Pt 15] Siano $A := \{x \in \mathbb{Q} \text{ tali che } \frac{16}{25} \le x^2 \le 8\}$ e $B := \{y = x^2 - x \text{ con } x \in \mathbb{Z}\}$. Si calcolino l'estremo superiore ed inferiore di A e B specificando se si tratti di massimo o minimo.

Es 5 [Pt. 10] Dimostrare che se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due successioni tali che $\lim a_n = \infty$ e $b_n \ge -10^{10}$ per ogni n, allora $\lim(a_n + b_n) = \infty$.

Es 6 [Pt. 15] Trovare un numero naturale N tale che

$$\left|\frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < 10^{-8} \ , \qquad \forall\, n \ge N \ .$$

Es 7 [Pt. 35] Calcolare i seguenti limiti:

$$(\mathbf{7.1}) \ \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/n}; \qquad (\mathbf{7.2}) \ \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}; \qquad (\mathbf{7.3}) \ \lim \frac{n^2+n}{\sqrt{2}n^2 + \sqrt{n}}$$

$$(\mathbf{7.4}) \ \lim \frac{n! + n^2}{2^n}; \qquad (\mathbf{7.5}) \ \lim \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Risposte
3: $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.
4: $\inf A = -2\sqrt{2}$, $\sup A = 2\sqrt{2}$. $\inf B = \min B = 0$, $\sup B = \infty$.
5: Sia $M \in \mathbb{R}$. $\exists\, N$ tale che $a_n > M + 10^{10}$ per ogni $n \ge N$. Quindi se $n \ge N$, $a_n + b_n > M + 10^{10} - 10^{10} = M$.
6 Si può prendere $N = 25 \cdot 10^6$.
7.1: 1. **7.2:** $1/e$. **7.3:** $\sqrt{2}/2$. **7.4:** ∞. **7.5:** 0.