

Complemento 5

Sottosuccessioni. Massimo e minimo limite

Definizione 1 Una sottosuccessione (o successione estratta) di una successione $\{a_n\}$ è una successione $\{b_k\}$ formata da elementi $b_k = a_{n_k}$ per una qualche successione $\{n_k\}$ strettamente crescente e a valori in \mathbb{N} .

Lemma 2 Sia $\{a_n\}$ una successione non limitata superiormente¹. Allora esiste una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ di $\{a_n\}$ strettamente crescente e tale che $\lim a_{n_k} = \infty$.

Dimostrazione Definiamo la successione $\{n_k\}$ in modo ricorsivo. Sia $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_1} > 1$. Scegliamo poi $n_2 > n_1$ tale che $a_{n_2} > \max\{a_{n_1}, 2\}$ e, iterativamente, scegliamo $n_{k+1} > n_k$ tale che $a_{n_{k+1}} > \max\{a_{n_k}, k\}$. La sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ ha le proprietà richieste. ■

Lemma 3 Se $\{a_n\}$ ammette limite (incluso $\pm\infty$) allora qualunque sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ ha lo stesso limite.

Dimostrazione Se $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$ dalle definizioni di limite segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - a| < \varepsilon$ per ogni $n \geq N$. Se $\{a_{n_k}\}$ è una sottosuccessione di $\{a_n\}$ allora $\lim a_{n_k} = a$ e quindi esiste un $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che $n_k > N$ per ogni $k \geq k_0$ e dunque se $k \geq k_0$ si avrà che $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ e quindi $\lim a_{n_k} = a$. Se $a_n \rightarrow \infty$, dato M esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > M$ per ogni $n \geq N$ e, come prima, si trova un k_0 tale che $n_k > N$ per ogni $k \geq k_0$ cosicché, per tali k , $a_{n_k} > M$ mostrando che $\lim a_{n_k} = \infty$; il caso $\lim a_n = -\infty$ si tratta in modo analogo. ■

Sia $\{a_n\}$ una successione limitata superiormente e si consideri la successione

$$\bar{a}_k := \sup\{a_n : n \geq k\} = \sup_{n \geq k} a_n . \quad (1)$$

Poiché l'insieme $\{n \geq k+1\} \subset \{n \geq k\}$ si ha che tale successione è monotona decrescente e dunque esiste il limite che coincide con l'estremo inferiore dei valori della successione (che può anche essere $-\infty$):

$$\inf \bar{a}_k = \lim \bar{a}_k . \quad (2)$$

Analogamente se $\{a_n\}$ è limitata inferiormente la successione

$$\underline{a}_k := \inf\{a_n : n \geq k\} = \inf_{n \geq k} a_n , \quad (3)$$

¹Ossia, l'insieme dei valori di $\{a_n\}$ non è limitato superiormente: $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \infty$ (che è anche equivalente a dire che per ogni $M \exists n \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > M$).

è monotona crescente e si ha che

$$\sup \underline{a}_k = \lim \underline{a}_k , \quad (4)$$

(e tale valore può essere $+\infty$).

Definizione 4 Se $\{a_n\}$ è una successione si definisce il suo massimo limite (o limite superiore) come

$$\limsup a_n := \overline{\lim} a_n := \begin{cases} +\infty & \text{se } \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty \\ \lim \bar{a}_k = \inf \bar{a}_k & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove \bar{a}_k è definito in (1). Analogamente, si definisce il minimo limite (o limite inferiore) di $\{a_n\}$ come

$$\liminf a_n := \underline{\lim} a_n := \begin{cases} -\infty & \text{se } \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = -\infty \\ \lim \underline{a}_k = \sup \underline{a}_k & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove \underline{a}_k è definito in (3).

Osservazione 5 (i) Chiaramente $\underline{a}_n \leq \bar{a}_n$ e dunque

$$\underline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} a_n \quad (5)$$

e, più sotto, vedremo che vale il segno di uguaglianza se e solo la successione $\{a_n\}$ ha limite.

(ii) Se $a_n \leq b_n$ allora

$$\underline{\lim} a_n \leq \underline{\lim} b_n , \quad \overline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} b_n \quad (6)$$

in particolare se $\{a_n\}$ è limitata, ossia se, per due numeri reali $c \leq C$ si ha che $c \leq a_n \leq C$ per ogni n , allora

$$c \leq \underline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} a_n \leq C . \quad (7)$$

(iii) $\overline{\lim} a_n = -\infty$ se e solo se $\lim a_n = -\infty$ e, analogamente $\underline{\lim} a_n = +\infty$ se e solo se $\lim a_n = \infty$.

Dimostriamo solo l'affermazione relativa al limite superiore. Se $\overline{\lim} a_n = -\infty$ allora $\inf \bar{a}_n = -\infty$ quindi per ogni M esiste n tale $\bar{a}_n < M$ ma allora $a_k \leq \bar{a}_n < M$ per ogni $k \geq n$, il che vuol dire che $\lim a_k = -\infty$. Viceversa, se $\lim a_n = -\infty$ allora per ogni M esiste n tale che per ogni $k \geq n$, $a_k < M$ e quindi (prendendo l'estremo superiore per $k \geq n$) $\bar{a}_n \leq M$ il che vuol dire che $\lim \bar{a}_n = -\infty$ ossia $\overline{\lim} a_n = -\infty$. ■

Chiamiamo M un “maggiorante (rispettivamente, minorante) definitivo” di $\{a_n\}$ se esiste N tale che $a_n \leq M$ (rispettivamente, $a_n \geq M$) per ogni $n \geq N$.

Lemma 6 Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $\overline{\lim} a_n = M \in \mathbb{R}$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ $M + \varepsilon$ è un maggiorante definitivo di $\{a_n\}$. Analogamente se $\underline{\lim} a_n = m \in \mathbb{R}$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$, $m - \varepsilon$ è un minorante definitivo di $\{a_n\}$

Dimostrazione² Poiché $M = \inf \bar{a}_n$, segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{a}_N < M + \varepsilon$. Quindi, per ogni $n \geq N$ (per definizione di \bar{a}_n) si ha che $a_n \leq \bar{a}_N < M + \varepsilon$. ■

Teorema 7 Sia $\{a_n\}$ una successione.

(i) Esistono sottosuccessioni di $\{a_n\}$, $\{a_{n_k}\}$ e $\{a_{m_k}\}$, tali che

$$\lim a_{n_k} = \overline{\lim} a_n, \quad \lim a_{m_k} = \underline{\lim} a_n. \quad (8)$$

(ii) Se $\{a_{n_k}\}$ è una sottosuccessione di $\{a_n\}$ che ammette limite (eventualmente $\pm\infty$) allora

$$\underline{\lim} a_n \leq \lim a_{n_k} \leq \overline{\lim} a_n. \quad (9)$$

(iii) $\{a_n\}$ ammette limite (eventualmente $\pm\infty$) se e solo se $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$.

Dimostrazione (i) Dimostriamo la prima uguaglianza in (8); la seconda si tratta in modo del tutto analogo.

Assumiamo, dapprima, che $\overline{\lim} a_n = M \in \mathbb{R}$. Per ogni $j \in \mathbb{N}$ esiste un intero $m > j$ tale che³

$$\bar{a}_m < M + \frac{1}{j}; \quad (10)$$

e dalla definizione di \bar{a}_m segue che esiste $m_j \geq m$ tale che

$$\bar{a}_m - \frac{1}{j} < a_{m_j}. \quad (11)$$

Ma allora, poiché $M \leq \bar{a}_m$ e $a_{m_j} \leq \bar{a}_m$, da (10) e (11) segue che

$$M - \frac{1}{j} \leq \bar{a}_m - \frac{1}{j} < a_{m_j} \leq \bar{a}_m < M + \frac{1}{j}$$

²Dimostriamo solo l'affermazione relativa al massimo limite; quella relativa al minimo limite si dimostra in modo del tutto analogo.

³Segue dal fatto che $\lim \bar{a}_n = M$. Si noti che se una successione a_n converge ad L allora, per ogni $j \in \mathbb{N}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k+j} = L$ (Lemma 3 con $n_k := k + j$).

e quindi $\lim a_{m_j} = M$. Poiché $m_j \geq m > j$, $\lim m_j = +\infty$ e quindi, dal Lemma 2 applicato alla successione $\{m_j\}$, segue che esiste una sottosuccessione $\{m_{j_k}\}$ di $\{m_j\}$ strettamente crescente con limite $+\infty$ e, in conclusione, otteniamo la tesi ponendo $n_k := m_{j_k}$.

Nel caso $\overline{\lim} a_n = \infty$ la tesi segue dal Lemma 2.

Se $\overline{\lim} a_n = -\infty$ allora (Osservazione 5, punto (iii)) $\lim a_n = -\infty$ (e la tesi vale con $n_k = k$).

(ii) Dimostriamo che se $\{a_{n_k}\}$ è una sottosuccessione di $\{a_n\}$ che ha limite (incluso $\pm\infty$) allora

$$\lim a_{n_k} \leq \overline{\lim} a_n ; \quad (12)$$

la dimostrazione per il limite inferiore è del tutto analoga.

Se $\overline{\lim} a_n = \infty$, la disuguaglianza (12) è evidentemente soddisfatta.

Se $\overline{\lim} a_n = -\infty$, da (iii)–Osservazione 5 segue che $\lim a_n = -\infty$ e quindi, dal Lemma 3, segue che $\lim a_{n_k} = -\infty$, da cui (12) (col segno di uguaglianza).

Supponiamo ora che $\overline{\lim} a_n =: M \in \mathbb{R}$. Se $\lim a_{n_k} = -\infty$ la (12) è soddisfatta. Sia dunque $\lim a_{n_k} = a \in \mathbb{R}$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Dal Lemma 6 segue che esiste k_1 tale che

$$a_k < M + \varepsilon , \quad \forall k \geq k_1 , \quad (13)$$

e, quindi, se k_2 è tale che $n_k \geq k_1$ per ogni $k \geq k_2$ si ha che

$$a_{n_k} < M + \varepsilon , \quad \forall k \geq k_2 ,$$

e, prendendo il limite per $k \rightarrow \infty$ in tale relazione si ottiene che $a \leq M + \varepsilon$, che, per l'arbitrarietà di⁴ ε , implica che $a \leq M$, ossia la (12).

(iii) Se $\{a_n\}$ ammette limite, per il Lemma 3, qualunque sua sottosuccessione ha lo stesso limite e dunque, per il punto (i), $\liminf a_n = \lim a_n = \limsup a_n$.

Se $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = +\infty$ allora $\lim a_n = +\infty$ (Osservazione 5, (iii)). Stesso ragionamento se $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = -\infty$. Infine, supponiamo che $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = a \in \mathbb{R}$. Sia $\varepsilon > 0$. Dal Lemma 6 segue che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $a - \varepsilon < a_k < a + \varepsilon$ per ogni $k \geq n$, ma questo significa che $\lim a_n = a$.

Il Teorema è completamente dimostrato. ■

Infine, dimostriamo che il limite superiore coincide con l'estremo inferiore dei maggioranti definitivi e anche con il massimo dei limiti ottenibili tramite sottosuccessioni (e analoghe affermazioni per il limite inferiore).

Data una successione $\{a_n\}$, definiamo i seguenti insiemi:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_+ &:= \{M : M \text{ è maggiorante definitivo di } \{a_n\}\} \\ \mathcal{M}_- &:= \{M : M \text{ è minorante definitivo di } \{a_n\}\} \\ \mathcal{L} &:= \{L : \exists \{a_{n_k}\} \text{ tale che } \lim a_{n_k} = L\} . \end{aligned}$$

⁴Se a e b sono numeri reali tali che per ogni $\varepsilon > 0$, $a \leq b + \varepsilon$ allora $a \leq b$; analogamente se $a \geq b - \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ allora $a \geq b$ (esercizio).

Proposizione 8 Sia $\{a_n\}$ una successione limitata superiormente. Allora

$$\overline{\lim} a_n = \inf \mathcal{M}_+ = \max \mathcal{L} . \quad (14)$$

Analogamente, se $\{a_n\}$ è limitata inferiormente, si ha

$$\underline{\lim} a_n = \sup \mathcal{M}_- = \min \mathcal{L} . \quad (15)$$

Dimostrazione Dimostriamo solo (14), lasciando (15) per esercizio.

(14): Sia $\lambda := \overline{\lim} a_n$ e $\mu := \inf \mathcal{M}_+$. Per ogni $\varepsilon > 0$, $\lambda + \varepsilon$ è un maggiorante definitivo (Lemma 6); quindi $\mu \leq \lambda + \varepsilon$ e (per l'arbitrarietà di ε) $\mu \leq \lambda$. D'altra parte, per ogni $M \in \mathcal{M}_+$ esiste N tale che $a_n \leq M$ per ogni $n \geq N$ e quindi $\lambda \leq \bar{a}_n \leq M$. Dunque, λ è un minorante di \mathcal{M}_+ e quindi $\mu \geq \lambda$, cosicché $\lambda = \mu$.

(15): Sia $\lambda := \underline{\lim} a_n$. Da (ii)–Teorema 7 segue che $L \leq \lambda$ per ogni $L \in \mathcal{L}$. D'altra parte per il punto (i) dello stesso teorema segue che esiste $M \in \mathcal{L}$ tale che $M = \lambda$ e dunque tale M è il massimo di \mathcal{L} che coincide con λ . ■