Complemento 4

Coseno, seno, e pi greco

Definizione 1 *Per ogni $x \in \mathbb{R}$ poniamo*

$$\begin{cases} \cos x := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} \cdots \\ \\ \operatorname{sen} x := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} \cdots \end{cases} \tag{1}$$

Osservazione 2 (i) Le due serie in (1) convergono assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$ (criterio del rapporto) e

$$\begin{cases} \cos 0 = 1 \\ \operatorname{sen} 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \, . \end{cases} \tag{2}$$

(ii) Le formule (1) permettono di calcolare (con precisione arbitraria) il valore del seno e coseno in qualunque punto x. Ad esempio,

$$\cos 2 = \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!} + r = -\frac{131}{315} + r \ , \qquad r := \sum_{k=5}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!} \ , \tag{3}$$

e da (9) del Complemento 2 segue che $|r| < \sum_{k=10}^{\infty} \frac{2^k}{k!} < \frac{2^{11}}{10!} = \frac{8}{14175}$, e quindi

$$-0.417 < -\frac{5903}{14175} < \cos 2 < -\frac{841}{2025} < -0.415 \ . \tag{4}$$

Il comportamento del seno e coseno "vicino" a $x = 0$ è il seguente:

Lemma 3 *Per ogni $|x| \leq 1$ si ha*

$$|\operatorname{sen} x - x| \leq \frac{|x|^3}{3} \ , \qquad \left| \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{x^4}{12} \ ; \tag{5}$$

$$|\operatorname{sen} x| \leq \frac{4}{3}|x| \ , \qquad |1 - \cos x| \leq \frac{7}{12}x^2 \ ; \tag{6}$$

$$\left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 \right| \leq \frac{x^2}{3} \ , \qquad \left| \frac{1 - \cos x}{x^2} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{x^2}{12} \ , \quad (x \neq 0) \ . \tag{7}$$

Dimostrazione Dalla definizione di seno e coseno e dalla (9) del Complemento 2 segue che, per $|x| \leq 1$,

$$
\begin{aligned}
|\operatorname{sen} x - x| &= \Big|\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\Big| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}\\
&\le \sum_{k=3}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \le 2\,\frac{|x|^3}{6} = \frac{|x|^3}{3}\\
\Big|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\Big| &= \Big|\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\Big| \le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\\
&\le \sum_{k=4}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \le 2\frac{x^4}{4!} = \frac{x^4}{12}.
\end{aligned}
$$

Da (5) segue che

$$
\begin{aligned}
&|\operatorname{sen} x| = |\operatorname{sen} x - x + x| \le |\operatorname{sen} x - x| + |x| \le |x|\Big(\frac{x^2}{3}+1\Big) \le \frac{4}{3}|x|\\
&|1-\cos x| \le \Big|1-\cos x - \frac{x^2}{2}\Big| + \frac{x^2}{2} \le x^2\Big(\frac{x^2}{12}+\frac{1}{2}\Big) = \frac{7}{12}x^2.
\end{aligned}
$$

Infine (7) segue immediatamente da (5) dividendo per $|x|$. ∎

Da (7) seguono immediatamente i seguenti limiti notevoli[1]

Corollario 4 *Se $0 \ne a_n \to 0$, allora*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} = 1\ , \tag{8}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos a_n}{a_n^2} = \frac{1}{2}\ . \tag{9}$$

Teorema 5 (Formula di addizione per il coseno)

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y\ , \qquad \forall\ x,y \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Dimostrazione Dalla formula per il binomio di Newton,

$$
\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \sum_{k\ge 0}(-1)^k \frac{(x+y)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\sum_{j=0}^{2k}\binom{2k}{j}x^j y^{2k-j}\\
&= \sum_{k\ge 0}(-1)^k \sum_{j=0}^{2k}\frac{x^j}{j!}\,\frac{y^{2k-j}}{(2k-j)!} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

[1]Si osservi che se $a_n \to 0$ allora esiste N tale che $|a_n| < 1$ per ogni $n \ge N$.

e separando le potenze pari dalle dispari nella somma su j, otteniamo

$$\cos(x+y) = P + D$$

con[2]

$$\begin{aligned}
P &:= \sum_{k\ge 0}(-1)^k \sum_{h=0}^{k} \frac{x^{2h}}{(2h)!}\frac{y^{2(k-h)}}{(2(k-h))!}\\
D &:= \sum_{k\ge 1}(-1)^k \sum_{h=0}^{k-1} \frac{x^{(2h+1)}}{(2h+1)!}\frac{y^{2(k-h)-1}}{(2(k-h)-1)!}\\
&= \sum_{n\ge 0}(-1)^{n+1} \sum_{h=0}^{n} \frac{x^{2h+1}}{(2h+1)!}\frac{y^{2(n-h)+1}}{(2(n-h)+1)!}\\
&= -\sum_{n\ge 0}(-1)^{n} \sum_{h=0}^{n} \frac{x^{2h+1}}{(2h+1)!}\frac{y^{2(n-h)+1}}{(2(n-h)+1)!}\ .
\end{aligned}$$

Si noti che

$$\begin{aligned}
|P| &\le \sum_{k\ge 0}\sum_{h=0}^{k} \frac{x^{2h}}{(2h)!}\frac{y^{2(k-h)}}{(2(k-h))!} = \cosh(x+y)\\
|D| &\le \sum_{n\ge 0}\sum_{h=0}^{n} \frac{|x|^{2h+1}}{(2h+1)!}\frac{|y|^{2(n-h)+1}}{(2(n-h)+1)!} = \sinh(|x|+|y|)\ ,
\end{aligned}$$

e quindi, per il Corollario 2 del Complemento 3 (si veda anche l'Esempio 3), possiamo scambiare l'ordine delle somme, ottenendo

$$\begin{aligned}
P &:= \sum_{h\ge 0}\sum_{k\ge h}(-1)^k \frac{x^{2h}}{(2h)!}\frac{y^{2(k-h)}}{(2(k-h))!}\\
&= \sum_{h\ge 0}(-1)^h \sum_{k\ge h}(-1)^{k-h} \frac{x^{2h}}{(2h)!}\frac{y^{2(k-h)}}{(2(k-h))!}\\
&= \sum_{h\ge 0}(-1)^h \sum_{j\ge 0}(-1)^{j} \frac{x^{2h}}{(2h)!}\frac{y^{2j}}{(2j)!}\\
&= \Big(\sum_{h\ge 0}(-1)^h \frac{x^{2h}}{(2h)!}\Big)\Big(\sum_{j\ge 0}(-1)^j \frac{y^{2j}}{(2j)!}\Big)\\
&= \cos x \cos y\ ,
\end{aligned}$$

e in maniera del tutto analoga si vede che $D = -\mathrm{sen}\, x\, \mathrm{sen}\, y$ ossia la tesi. ∎

[2] Si noti che il termine in (11) con $k = 0$ appare (solo) in P e pertanto la somma su k in D parte da $k = 1$. Inoltre, le j dispari tra 0 e $2k$ sono date da $j = 2h + 1$ con $0 \le h \le k - 1$.

Osservazione 6 Prendendo $y = -x$ in (10) e ricordando (2) si ha che

$$\cos^2 x + \mathrm{sen}^2 x := (\cos x)^2 + (\mathrm{sen}\, x)^2 = 1, \tag{12}$$

da cui

$$|\cos x| \le 1 \;, \qquad |\mathrm{sen}\, x| \le 1 \;, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Prendendo $x = y$ in (10) otteniamo

$$\cos 2x = \cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x \;. \tag{14}$$

Proposizione 7 ("Permanenza del segno per il coseno") *Sia x_0 tale che $\cos x_0 > 0$ (oppure $\cos x_0 < 0$). Allora esiste $\delta > 0$ tale $\cos x > 0$ (rispettivamente, $\cos x < 0$) per ogni $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.*

Dimostrazione Consideriamo il caso $\cos x_0 > 0$ (il caso negativo si tratta in maniera del tutto analoga e viene lasciato per esercizio). Sia $0 < \delta := |\cos x_0|/2$ e si osservi che $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ se e solo se $x = x_0 + y$ con $|y| \le \delta$. Dunque se $x = x_0 + y$ con $|y| \le \delta$, da (10), (13) e (6) segue che

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos(x_0 + y) = \cos x_0 \cos y - \mathrm{sen}\, x_0\, \mathrm{sen}\, y \\
&= \cos x_0 - \Big(\cos x_0 (1 - \cos y) + \mathrm{sen}\, x_0\, \mathrm{sen}\, y\Big) \\
&\ge \cos x_0 - (|1 - \cos y| + |\mathrm{sen}\, y|) \\
&\ge \cos x_0 - \frac{23}{24}\,|y| \ge \cos x_0 - \frac{23}{24}\,\delta \\
&> \cos x_0 - 2\delta = 0 \;. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 8 *Esiste $\beta \in (0, 2)$ tale che $\cos \beta = 0$ e $\cos x > 0$ per ogni $x \in [0, \beta)$.*

Dimostrazione Sia $P := \{b > 0 : \cos x > 0$ per ogni $0 \le x < b\}$. Poiché $\cos 0 = 1$, dal Teorema 7 segue che esiste $\delta > 0$ tale che $\cos x > 0$ per ogni $|x| < \delta$ e quindi $\delta \in P$ mostrando che $P \ne \emptyset$. Dalla definizione di P segue che se $y > 0$ e $\cos y < 0$, allora y è un maggiorante per P. In particolare, da (4) segue che 2 è un maggiorante per P. Sia $\beta = \sup P$. Se fosse $\cos \beta > 0$, dal Teorema 7 seguirebbe che $\cos x > 0$ per $x \in [\beta - \delta, \beta + \delta]$ con un opportuno $\delta > 0$: ma questo significherebbe che $\beta + \delta \in P$ e che β non è un maggiorante. Se fosse $\cos \beta < 0$, dal Teorema 7 seguirebbe che $\cos x < 0$ per $x \in [\beta - \delta, \beta + \delta]$ con un opportuno $\delta > 0$: ma questo significherebbe che $\beta - \delta < \beta$ è un maggiorante contraddicendo il fatto che β è l'estremo superiore di P. Dunque $\cos \beta = 0$ e il teorema è dimostrato. $\blacksquare$

Definizione 9 (Pi greco) *$\pi := 2\beta$ dove β è il numero nel Teorema 8.*

Proposizione 10 *$\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\mathrm{sen}\, \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \pi = -1$, $\mathrm{sen}\, \pi = 0$, $\cos \frac{3}{2}\pi = 0$, $\mathrm{sen}\, \frac{3}{2}\pi = -1$, $\cos 2\pi = 1$, $\mathrm{sen}\, 2\pi = 0$.*

Dimostrazione Dalla definizione di π e dal Teorema 8 segue che $\cos\frac{\pi}{2}=0$; dunque da (12) segue che $|\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}|=1$. D'altra parte, da (7) segue che se $0<x<1$, $\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}-1>-\frac{1}{3}$ ossia $\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}>\frac{2}{3}$, e quindi, in particolare, $\mathrm{sen}\,x>0$ se $0<x<1$. Da (10) e dalla definizione di π segue che, per ogni $0\le x<\frac{\pi}{2}$, $\cos\big(\frac{\pi}{2}-x\big)=\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\ \mathrm{sen}\,x$; quindi se $0<x<\min\{1,\frac{\pi}{2}\}$, $\mathrm{sen}\,x>0$ e $\cos\big(\frac{\pi}{2}-x\big)>0$, il che implica $\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}=1$.

Da (14) segue che $\cos\pi=\cos^2\frac{\pi}{2}-\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{2}=-1$ e quindi, per (12), $\mathrm{sen}\,\pi=0$. Ancora da (14) segue che $\cos 2\pi=\cos^2\pi-\mathrm{sen}^2\pi=1$ e quindi (da (12)) $\mathrm{sen}\,2\pi=0$.
Infine, $\cos\frac{3}{2}\pi=\cos(2\pi-\frac{\pi}{2})=\cos 2\pi\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{sen}\,2\pi\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}=0$, e $-1=\cos\pi=\cos\big(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}\big)=\cos\frac{3}{2}\pi\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{sen}\,\frac{3}{2}\pi\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}=\mathrm{sen}\,\frac{3}{2}\pi$. ∎

Da (10) e dalla Proposizione 10 segue immediatamente che

$$\cos(x-\frac{\pi}{2})=\mathrm{sen}\,x \tag{15}$$

e anche (scrivendo $\cos x=\cos\big((x-\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2}\big)$) che

$$\mathrm{sen}\,\big(x-\frac{\pi}{2}\big)=-\cos x\ . \tag{16}$$

Quindi,

$$\begin{aligned}\mathrm{sen}\,(x+y) &\overset{(15)}{=} \cos\big(x-\frac{\pi}{2}+y\big)\\ &= \cos\big(x-\frac{\pi}{2}\big)\cos y-\mathrm{sen}\,\big(x-\frac{\pi}{2}\big)\mathrm{sen}\,y\\ &\overset{(16)}{=} \mathrm{sen}\,x\cos y+\cos x\,\mathrm{sen}\,y\ ,\end{aligned}$$

ossia

Teorema 11 (Formula di addizione per il seno)

$$\mathrm{sen}\,(x+y)=\mathrm{sen}\,x\cos y+\cos x\,\mathrm{sen}\,y\ ,\qquad \forall\ x,y\in\mathbb{R}. \tag{17}$$

Dalle formule di addizione (Teoremi 5 e 11) seguono immediatamente molte alte relazioni tra cui:

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x \ , \tag{18}$$

$$\cos(x+\pi) = -\cos x \ , \qquad \operatorname{sen}(x+\pi) = -\operatorname{sen} x \ , \tag{19}$$

$$\cos(x+2\pi) = \cos x \ , \qquad \operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x \ , \tag{20}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \ , \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \ , \tag{21}$$

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\big(\frac{x+y}{2}\big)\cos\big(\frac{x-y}{2}\big) \ , \tag{22}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\big(\frac{x+y}{2}\big)\cos\big(\frac{x-y}{2}\big) \ , \tag{23}$$

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big) \ , \tag{24}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\Big) \ , \tag{25}$$

$$\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)\Big) \ , \tag{26}$$

$$\cos x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}\Big(\sin(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)\Big) \ . \tag{27}$$

Infine, dimostriamo il seguente

Teorema 12 ("Continuità del seno e del coseno") *Se* $\lim a_n = a$, *allora* $\lim \cos a_n = \cos a$ *e* $\lim \operatorname{sen} a_n = \operatorname{sen} a$.

Dimostrazione Il caso $a = 0$ segue immediatamente da (6). Nel caso generale poniamo $t_n := a_n - a$ così che $t_n \to 0$. Allora, $\cos a_n = \cos(a + t_n) = \cos a \cos t_n - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} t_n \to \cos a$ e analogamente $\operatorname{sen} a_n = \operatorname{sen}(a + t_n) = \operatorname{sen} a \cos t_n + \cos a \operatorname{sen} t_n \to \operatorname{sen} a$. ∎