Appello A – 27/1/2010

- *Indicare in cima all'elaborato da consegnare: nome, cognome, data di nascita, n. matricola.*
- *Il punteggio totale è in centesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.*
- *È* **vietato***: parlare, scambiarsi informazioni; consultare testi, appunti, etc.; l'uso del cellulare, calcolatrici, etc.*
- *Le risposte vanno sempre motivate chiaramente e sinteticamente!* **Risposte senza giustificazioni non danno punteggio**.

Es 1 [Pt. 4] Enunciare l'assioma dell'estremo superiore (definendo i termini usati).

Es 2 [Pt. 5] Definire $\sqrt{2}$ e dimostrare che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Es 3 [Pt. 6] Dare la definizione di $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$; fare un esempio; dimostrare che se $b_n = 1 - \frac{1}{n}$ allora $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$.

Es 4 [Pt. 6] Calcolare il $\lim_{n\to\infty} \operatorname{senh}(\log n^2) \cdot \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Es 5 [Pt. 6] È vero che se $\lim a_n = 0$ allora $\sum a_n$ converge?

Es 6 [Pt. 8] Studiare la convergenza delle serie: (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^{100}}{3^n + e^n}$; (ii) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} + \frac{1}{n^2}}$.

Es 7 [Pt. 6] Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{(\operatorname{sen} x)^2}$.

Es 8 [Pt. 6] Dare la definizione di continuità e dire se la seguente funzione è continua in 1: $f(x) := \dfrac{x^2 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{[\sqrt{2} + x]}$ (dove $[\cdot]$ denota "parte intera").

Es 9 [Pt. 6] Dare la definizione di insieme aperto e dire quale dei seguenti insiemi è aperto: $[1, \infty)$; $\{x : x^2 > \sqrt{2}\}$; $\displaystyle\bigcap_{1\le j\le 100} \left(\frac{1}{j} - e^{-j}, \sqrt{2}^j\right)$.

Es 10 [Pt. 9] Sia $a_n = e^{-n} \cosh n$. Trovare $L = \lim a_n$. Trovare N tale che $|a_n - L| < \frac{1}{10}$ per ogni $n \ge N$.

Es 11[Pt. 9] Studiare, al variare di x, la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^{n^x}}{n!^2}$.

Es 12 [Pt. 9] Calcolare $\displaystyle\limsup_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + x}$.

Es 13 [Pt. 9] Sia $f(x) = \{x\}(1 - x)(16 - x^4)$ (dove $\{\cdot\}$ denota "parte frazionaria"). Dire su quale dei seguenti insiemi f è continua: $A = [0, 2]$, $B = [0, 3)$, $C = [0, 3]$.

Es 14 [Pt. 9] Trovare $\delta > 0$ tale che, se $x, y \in (1, 2)$ e $|x - y| < \delta$, allora $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < 1/10$.