

**ST1 - Scritto del 9-7-2008**  
E. Scoppola

**Esercizio 1**

Siano  $X_1, \dots, X_n$  e  $Y_1, \dots, Y_m$  due campioni casuali indipendenti dalla distribuzione normale  $\mathcal{N}(\mu, 1)$ .

- 1) Determinare  $a$  e  $b$  tali che

$$Z := a\bar{X} + b\bar{Y}$$

sia normale standard.

- 2) Determinare la distribuzione di  $Z^2$ .
- 3) Determinare la distribuzione di  $\frac{\bar{X} + \bar{Y}}{2}$  e confrontarla con quella di  $\frac{\sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^m Y_i}{n+m}$

**Esercizio 2**

Si consideri la funzione:

$$f(x, \theta) = Cx^5 \mathbf{1}_{[0, \theta]}(x)$$

con  $\theta > 0$ .

- 1) Calcolare la costante  $C$  tale che  $f(x, \theta)$  sia una densità.
- 2) Si calcoli  $E(X)$  e  $var(X)$  per  $X$  variabile casuale con questa densità.

Si consideri un campione casuale di ampiezza  $n$  da questa densità.

- 3) Determinare lo stimatore di  $\theta$  con il metodo dei momenti.
- 4) E' distorto? Calcolare il suo errore quadratico medio.
- 5) Determinare lo stimatore di  $\theta$  di massima verosimiglianza.
- 6) E' distorto? Calcolare il suo errore quadratico medio.
- 7) Determinare una statistica sufficiente.
- 8) Determinare un UMVUE per  $\theta$ .

**Esercizio 3**

Si consideri una moneta di cui non conosciamo la probabilità  $p$  dell'evento "testa".

- 1) Determinare una statistica sufficiente.
- 2) Determinare una statistica completa.
- 3) Determinare l'UMVUE per  $p$ .
- 4) Sapendo che la moneta o é equilibrata ( $H_0$ ) oppure la probabilitá di testa é doppia di quella di croce ( $H_1$ ).  
Determinare il test piú potente di ampiezza  $\alpha$  per  $H_0$  contro  $H_1$ .

**Per il recupero del primo esonero svolgere l'esercizio 1 e rispondere alle domande 1-6 dell'esercizio 2**

**Per il recupero del secondo esonero svolgere l'esercizio 3 e rispondere alle domande 1, 7 e 8 dell'esercizio 2**