

Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica  
Tutorato di ST1 - A.A. 2005/2006  
Docente: Prof.ssa E. Scoppola - Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Tutorato n.8 del 4/5/2006

**Esercizio 1.** Sia  $f(x; \theta) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^{|x|} (1 - \theta)^{1-|x|} \mathbb{1}_{\{-1,0,1\}}(x)$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ , la densità di  $X$ . Definite  $t(x) = 2 \cdot \mathbb{1}_{\{1\}}(x)$ .

- (a)  $X$  è una statistica sufficiente? È una statistica completa?
- (b)  $|X|$  è una statistica sufficiente? È una statistica completa?
- (c) Qual è lo stimatore di massima verosimiglianza di  $\theta$ ?
- (d)  $T = t(X)$  è uno stimatore non distorto di  $\theta$ ?
- (e)  $f(x; \theta)$  appartiene a una classe esponenziale?  $|X|$  è una statistica sufficiente minimale?

**Esercizio 2.** Sia  $X_1, \dots, X_n$  un campione casuale da  $f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0, \theta]}(x)$ , dove  $\theta > 0$ .

- (a) Stimare  $\theta$  con il metodo dei momenti, chiamate lo stimatore  $T_1$  e trovate la sua media e il suo errore quadratico medio.
- (b) Trovate lo stimatore di massima verosimiglianza di  $\theta$ , chiamate lo stimatore  $T_2$  e trovate la sua media e il suo errore quadratico medio.

**Esercizio 3.** Siano  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. estratti da una popolazione  $X$  con funzione di densità  $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta^2} x e^{-\frac{x}{\theta}}$  con  $x > 0$  e  $\theta > 0$ .

- (a) Valutare se la distribuzione appartiene alla famiglia esponenziale.
- (b) Trovare la statistica sufficiente.
- (c) Valutare se la media campionaria  $\bar{X}$  è uno stimatore corretto per  $\theta$ . Altrimenti correggerlo.
- (d) Calcolare l'MSE dello stimatore corretto calcolato al punto precedente.
- (e) Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza di  $\theta$ , vedere se è corretto. Trovare l'UMVUE.