Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di ST1 - A.A. 2005/2006
Docente: Prof.ssa E. Scoppola - Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.5 del 4/4/2006

Esercizio 1.

$$\mathbb{P}([Y]=y)=\int_y^{y+1}\lambda e^{-\lambda z}dz=-e^{-\lambda z}\Big|_y^{y+1}=e^{-\lambda y}-e^{-\lambda(y+1)}=e^{-\lambda y}(1-e^{-\lambda})=$$
$$=(e^{-\lambda})^y(1-e^{-\lambda})=(1-p)^z p \quad \text{avendo definito } p=1-e^{-\lambda}$$

Esercizio 2.

(a)

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\pi(1+y^2)}dy=\frac{1}{\pi}\ \arctan y\Big|_{-\infty}^{x}=\frac{1}{\pi}(\arctan x+\frac{1}{2})=\frac{1}{\pi}\arctan x+\frac{1}{2}$$

$$f_Y(y)=f_X\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\left|\frac{d}{dy}\frac{y-\mu}{\sigma}\right|=\frac{1}{\pi\sigma}\frac{1}{1+(\frac{y-\mu}{\sigma})^2}\sim Cauchy(\mu,\sigma)$$

(b)

$$f_Y(y)=f_X(\arctan y)\left|\frac{d}{dy}\arctan y\right|=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}$$

$$\mathbb{P}(Y\leqslant y)=\mathbb{P}(\tan X\leqslant y)=\mathbb{P}(X\leqslant\arctan y)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arctan y}\frac{1}{\pi}dx=$$
$$=\frac{1}{\pi}(\arctan y+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{\pi}\arctan y+\frac{1}{2}$$

Esercizio 3.

(a)

$$\int_\theta^{+\infty}\frac{\theta}{x^2}dx=-\frac{\theta}{x}\Big|_\theta^{+\infty}=1$$

(b)

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta}{x_i^2}I_{(\theta,+\infty)}(x_i)=\frac{\theta^n}{\prod_i x_i^2}I_{(\theta,+\infty)}(x_{(1)})=\frac{\theta^n}{\prod_i x_i^2}I_{(0,x_{(1)})}(\theta)$$

dove le uguaglianze sono giustificate dal fatto che tutte le funzioni indicatrici valgono 1 se e solo se tutte le x_i sono più grandi di θ, se e solo se la più piccola delle osservazioni è più grande di $theta$,se e solo se θ è più piccolo di $x_{(1)}$. Se si calcola la derivata della verosimiglianza si vede che non ci sono punti massimo o minimo relativi interni al dominio, quindi il massimo è assunto sul bordo e si vede che si ha in corrispondenza di $x_{(1)}$, quindi lo stimatore di massima verosimiglianza è $X_{(1)}$, il mimino delle X_i.

Esercizio 4.

(a)

$$\int_0^\theta \frac{2x}{\theta^2}dx=\frac{x^2}{\theta^2}\Big|_0^\theta=1$$

(b)

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2x_i}{\theta^2}I_{(0,\theta)}(x_i)=\frac{2^n\prod_i x_i}{\theta^{2n}}I_{(x_{(n)},+\infty)}(\theta)$$

dove l'uguaglianza è giustificata dal fatto che tutte le funzioni indicatrici valgono 1 se e solo se tutte le x_i sono più piccole di θ, se e solo se la più grande delle osservazioni è più piccola di θ, se e solo se θ è più grande di $x_{(n)}$. Si vede che la funzione di verosimiglianza è decrescente quindi il massimo è aasunto in corrispondenza di $x_{(n)}$, quindi lo stimatore di massima verosimiglianza è $X_{(n)}$, il massimo delle X_i.