Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di ST1 - A.A. 2005/2006
Docente: Prof.ssa E. Scoppola - Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.11 del 25/5/2006

Esercizio 1.

(a) $\pi(\theta) = \mathbb{P}\left(X \geq \frac{1}{2}\Big|\theta\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \theta x^{\theta-1} dx = 1 - \frac{1}{2^\theta} \qquad \sup_{\theta\leq 1} \pi(\theta) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(b) Usiamo il lemma di Neyman-Pearson: $\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = 2x \leq k^* \quad \Leftrightarrow \quad x \leq k$, quindi la regione critica è $C = \{x | x \leq k\}$. Troviamo k tramite:
$\alpha = \mathbb{P}(X \leq k|\theta_0) = \int_0^k 2x\, dx = k^2$, quindi $k = \sqrt{\alpha}$.

(c) Si può vedere che la densità appartiene alla famiglia esponenziale, infatti: $f(x;\theta) = \theta e^{(\theta-1)\log x}\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$, applichiamo, quindi, il teorema. La funzione $c(\theta) = \theta - 1$ è una funzione crescente, la statistica che dobbiamo usare è $T = \log X$ e quindi (*notare che le disuguaglianze nelle due regioni di verifica sono invertite rispetto a quelle del teorema, ciò implica che dobbiamo invertire la disuguaglianza nella regione critica corrispondente*) dobbiamo vedere se esiste k^* tale che $\alpha = \mathbb{P}(\log X < k^*|\theta_0 = 2) = \mathbb{P}\left(X < e^{k^*} = k|\theta_0 = 2\right) = \int_0^k 2x\, dx = k^2$, quindi il test UMP di ampiezza α è quello individuato dalla regione critica $C = \{x|x < \sqrt{\alpha}\}$.

(d) Tutti i rapporti di verosimiglianza sono del tipo $\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = 2x \leq k$. L'errore di I tipo è $\alpha = \mathbb{P}(2X \leq k|\theta_0 = 2) = \int_0^{\frac{k}{2}} 2x\, dx = \frac{k^2}{4}$, l'errore di II tipo è $\beta = \mathbb{P}(2x > k|\theta_1 = 1) = \int_{\frac{k}{2}}^1 dx = 1 - \frac{k}{2}$. Dobbiamo quindi minimizzare rispetto a k la quantità $\alpha + \beta = \frac{k^2}{4} + 1 - \frac{k}{2} = \frac{k^2 - 2k + 4}{4}$ e il minimo è raggiunto in $k = 1$, quindi la regione critica $C = \{x|2x \leq 1\}$ è quella che individua il test di rapporto di verosimiglianza che minimizza $\alpha + \beta$.

Esercizio 2. Si denoti con $X_1, \ldots, X_n$ un campione estratto da $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}} \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$.
Verificate $\begin{cases} \mathbb{H}_0 : \theta \leq \theta_0 \\ \mathbb{H}_1 : \theta > \theta_0 \end{cases}$

(a) La densità appartiene alla famiglia esponenziale, infatti:
$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{\frac{1-\theta}{\theta}}$, possiamo applicare, quindi, il teorema. La funzione $c(\theta) = \frac{1-\theta}{\theta}$ è decrescente e la statistica che dobbiamo usare è $T = \sum_{i=1}^n \log X_i$, deve esistere k^* tale che $\alpha = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n \log X_i < k^* \Big| \theta_0\right)$. Dobbiamo, quindi,

trovare la distribuzione di T. Troviamo la distribuzione di $Z_i = -\log X_i$: $f_{Z_i}(z) = f_{X_i}\left(e^{-z}\right)e^{-z} = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}z}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(z) \sim Esp\left(\frac{1}{\theta}\right)$, quindi $Y = \sum_{i=1}^{n} Z_i \sim Gamma\left(n, \frac{1}{\theta}\right)$, infine troviamo la densità di $W = -Y = -\sum_{i=1}^{n} Z_i = \sum_{i=1}^{n} \log X_i$ ed è $f_W(w) = f_Y(-w) = \frac{\left(\frac{1}{\theta}\right)^n}{\Gamma(n)}(-w)^{n-1}e^{\frac{1}{\theta}w}\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(w)$.

(b) $0,05 = \mathbb{P}(W < k^*|\theta_0 = 1) = \int_{-\infty}^{k^*} -we^{\frac{1}{\theta}w}dw = e^{k^*} - k^*e^{k^*}$, quindi la funzione di potenza è $\pi(\theta) = \mathbb{P}(W < k^*|\theta) = -\frac{1}{\theta^2}\left\{k^*\theta e^{\frac{k^*}{\theta}} - \theta^2 e^{\frac{k^*}{\theta}}\right\}$ con k^* che verifica la relazione sopra.

Esercizio 3. Sappiamo, quindi, che la densità di $Z = X_1+X_2$ è $f_Z(z) = \frac{1}{\theta^2}(z\mathbb{1}_{(0,\theta)}(z) + (2\theta - z)\mathbb{1}_{(\theta,2\theta)}(z))$. Quindi $\pi(\theta) = \mathbb{P}(Z \geq 1|\theta) = \int_1^{2\theta} f_Z(z)dz$. Dobbiamo distinguere quindi due casi: il primo in cui $1 < \theta$, il secondo in cui $1 \geq \theta$ (ovviamente se $\theta \leq \frac{1}{2}$ la funzione di potenza è nulla). Per il primo caso si ha: $\pi(\theta) = \frac{1}{\theta^2}\left[\int_1^{\theta} z\, dz + \int_{\theta}^{2\theta}(2\theta - z)dz\right] = \left(1 - \frac{1}{2\theta^2}\right)\mathbb{1}_{(1,+\infty)}(\theta)$. Per il secondo: $\pi(\theta) = \frac{1}{\theta^2}\int_1^{2\theta}(2\theta - z)dz = \frac{(2\theta-1)^2}{2\theta^2}\mathbb{1}_{(\frac{1}{2},1)}(\theta)$. Quindi la funzione di potenza è: $\pi(\theta) = \frac{(2\theta-1)^2}{2\theta^2}\mathbb{1}_{(\frac{1}{2},1]}(\theta) + \left(1 - \frac{1}{2\theta^2}\right)\mathbb{1}_{(1,+\infty)}(\theta)$. L'ampiezza è quindi: $\alpha = \sup_{\theta \leq 1}\pi(\theta) = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4. Le variabili sono $Gamma(2, \theta)$ e la densità appartiene alla famiglia esponenziale. La funzione $c(\theta) = -\theta$ è decrescente, la statistica da utilizzare è $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e la statistica si distribuisce come una $Gamma(2n, \theta)$, quindi $\alpha = \mathbb{P}(Z < k^*)$ e la regione critica del test UMP è $C = \{(x_1, \ldots, x_n)|Z < k^*\}$, con k^* che verifica la relazione sopra.