Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di ST1 - A.A. 2005/2006
Docente: Prof.ssa E. Scoppola - Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.11 del 25/5/2006

Esercizio 1. Sia X una osservazione singola dalla densità

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x), \quad \theta > 0$$

(a) Nel verificare $\begin{cases} \mathbb{H}_0 : \theta \leq 1 \\ \mathbb{H}_1 : \theta > 1 \end{cases}$ determinate la funzione di potenza e l'ampiezza di un test del tipo: si rifiuti $\mathbb{H}_0$ se e solo se $X \geq \frac{1}{2}$.

(b) Determinate un test più potente di ampiezza α per $\begin{cases} \mathbb{H}_0 : \theta_0 = 2 \\ \mathbb{H}_1 : \theta_1 = 1 \end{cases}$

(c) Vedere se esiste un test uniformemente più potente di ampiezza α per $\begin{cases} \mathbb{H}_0 : \theta \geq 2 \\ \mathbb{H}_1 : \theta < 2 \end{cases}$, se sì trovarlo.

(d) Tra tutti i test possibili di rapporto di verosimiglianza per $\begin{cases} \mathbb{H}_0 : \theta_0 = 2 \\ \mathbb{H}_1 : \theta_1 = 1 \end{cases}$, trovate quel test che minimizza $\alpha + \beta$ dove α e β sono rispettivamente le ampiezze degli errori di I e II tipo.

Esercizio 2. Si denoti con $X_1, \ldots, X_n$ un campione estratto da $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}x^{\frac{1-\theta}{\theta}}\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$. Verificate $\begin{cases} \mathbb{H}_0 : \theta \leq \theta_0 \\ \mathbb{H}_1 : \theta > \theta_0 \end{cases}$

(a) Per un campione di ampiezza n, trovate, se esiste, un test uniformemente più potente (UMP) di ampiezza α.

(b) Presi $n = 2$, $\theta_0 = 1$, $\alpha = 0,05$ trovate la funzione di potenza del test UMP.

Esercizio 3. Per verificare $\begin{cases} \mathbb{H}_0 : \theta \leq 1 \\ \mathbb{H}_1 : \theta > 1 \end{cases}$ sulla base di due osservazioni X_1 e X_2 estratte dalla distribuzione uniforme su $(0, \theta)$, è stato usato usato il seguente test: si rifiuti $\mathbb{H}_0$ se $X_1 + X_2 \geq 1$. Determinate la funzione di potenza del test precedente e calcolatene l'ampiezza. [Ricordate che $X_1 + X_2$ ha distribuzione triangolare su $(0, 2\theta)$.]

Esercizio 4. Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale di ampiezza n estratto da

$$f(x;\theta) = \theta^2 x e^{-\theta x}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$$

Vedere se esiste un test uniformemente più potente di ampiezza α per verificare

$$\begin{cases} \mathbb{H}_0 : \theta \leq 1 \\ \mathbb{H}_1 : \theta > 1 \end{cases}$$