

Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica  
Tutorato di ST1 - A.A. 2005/2006  
Docente: Prof.ssa E. Scoppola - Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Tutorato n.1 del 9/3/2006

**Esercizio 1.** Siano  $X$  e  $Y$  due variabili casuali indipendenti che assumono valori interi positivi, aventi funzione di distribuzione  $f(x) = 2^{-x}$  per  $x=1, 2, \dots$ . Trovare:

- (a)  $\mathbb{P}(\min\{X, Y\} \leq x)$ ,
- (b)  $\mathbb{P}(Y > X)$ ,
- (c)  $\mathbb{P}(X = Y)$ ,
- (d)  $\mathbb{P}(X \geq kY)$ , per  $k$  intero positivo dato.

**Esercizio 2.** Sia  $N$  un numero casuale di monete, dove  $N \sim Po(\lambda)$ . Lanciamo ciascuna moneta una volta, uscirà testa con probabilità  $p$  ogni volta. Far vedere che in numero totale di teste  $S \sim Po(\lambda p)$ .

**Esercizio 3.** Mostrare le seguenti:

- (a)  $\mathbb{E}(aY + bZ|X) = a\mathbb{E}(Y|X) + b\mathbb{E}(Z|X)$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ ,
- (b) se  $X$  e  $Y$  sono indipendenti allora  $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$ .

**Esercizio 4.** Siano  $X$  e  $Y$  variabili casuali aventi funzione di densità congiunta  $f(x, y) = cx(y - x)e^{-y}$ ,  $0 \leq x \leq y < +\infty$ .

- (a) Trovare  $c$ .
- (b) Mostrare che:

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= 6x(y - x)y^{-3}, & 0 \leq x \leq y. \\ f_{Y|X}(y|x) &= (y - x)e^{x-y}, & 0 \leq x \leq y < +\infty. \end{aligned}$$

- (c) Dedurre che  $\mathbb{E}(X|Y) = \frac{1}{2}Y$  e  $\mathbb{E}(Y|X) = X + 2$ .

**Esercizio 5.** Sia  $X \sim Po(\lambda)$ . Trovare la funzione generatrice dei momenti di  $X$  e quindi media e varianza. Siano, poi,  $X_1, X_2, \dots, X_n \sim Po(\lambda)$  i.i.d., dimostrare che  $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim Po(n\lambda)$ .

**Esercizio 6.** Sia  $X \sim Esp(\lambda)$ , trovare la funzione generatrice dei momenti di  $X$  e quindi media e varianza.