ST1 - Scritto del 8-6-2007
E. Scoppola

Soluzione esercizio 1

1) Sia $\tau_1(\theta) = \theta$ e $\tau_2(\theta) = \frac{1}{\theta}$ e denotiamo con T_1 e T_2 i rispettivi stimatori non distorti. Allora (vd MGB pg 324)

$$var(T_1) \geq \frac{\theta^2}{n}$$

$$var(T_2) \geq \frac{1}{n\theta^2}$$

2) La distribuzione appartiene alla famiglia esponenziale ad un parametro con $d(x) = x$ e dunque $\sum_{i=1}^n X_i$ è una statistica sufficiente minimale completa.

3) Applicando il teorema di Lehmann-Sceffè abbiamo che $\bar{X}$ è l'UMVUE di τ_2 e $\frac{n-1}{\sum_{i=1}^n X_i} =: S_1$ è l'UMVUE di τ_1 (vd MGB pg 333).

4) Abbiamo $var(S_1) = \frac{\theta^2}{n-2}$ che è maggiore del limite inferiore di Cramer-Rao, mentre $var(\bar{X}) = \frac{1}{n\theta^2}$ coincide col corrispondente limite inferiore di Cramer-Rao.

5) Sappiamo che $\bar{X} \sim \Gamma(n, n\theta)$ e dunque $Q := \theta\bar{X}$ é una quantità pivotale con distribuzione $\Gamma(n, n)$. D'altra parte $q_1 \leq Q \leq q_2$ e' equivalente a $\theta \in (\frac{q_1}{\bar{X}}, \frac{q_2}{\bar{X}})$. Dunque questo é l'intervallo di confidenza cercato se $q_1 = z_{0.05}$ e $q_2 = z_{0.95}$, dove $z_{0.05}$ e $z_{0.95}$ quantili della distribuzione $\Gamma(n, n)$.

6) Dal lemma di Neyman-Pearson abbiamo che il test piú potente é:

   si rifiuti $H_0 : \theta = 1$ se $\sum_i x_i \leq z_{0.1}$

   con $z_{0.1}$ il quantile 0.1 della distribuzione $\Gamma(n, 1)$ (vd MGB pg 414).

7) vd [MGB pg. 421].

Soluzione esercizio 2

1) Per definizione abbiamo che $aY_{(1)} \leq aY_{(n)}$ dunque basta dimostrare che

$$P\Big(\theta \in (aY_{(1)}, aY_{(n)})\Big) = \gamma$$

con γ indipendente da θ. Abbiamo

$$1-\gamma = P(\theta < aY_{(1)}) + P(\theta > aY_{(n)}) = \left(1-\frac{1}{a}\right)^n + \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

che non dipende da θ.

2) Dobbiamo trovare il minimo della funzione

$$f(a) = \left(1-\frac{1}{a}\right)^n + \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Abbiamo $f(1) = 1$ e $\lim_{a\to\infty} f(a) = 1$ e un unico punto critico, che é un minimo, che otteniamo calcolando la sua derivata:

$$f'(a) = \frac{n}{a^{n+1}}\left[(a-1)^{n-1} - 1\right]$$

che é nulla in $a = 2$ dove la funzione vale

$$f(2) = 2^{-(n-1)}.$$

. Dunque il valore ottimale per a é 2 e corrisponde ad un livello di confidenza $\gamma = 1 - 2^{-(n-1)}$.