ST1 - Scritto del 8-6-2006

E. Scoppola

Soluzione esercizio 1

1)
$$P(|\bar{X}-\mu|<0.3) = P(-\frac{0.3}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{0.3}{\sigma/\sqrt{n}}) =$$
$$= P(-0.3\sqrt{10} < Z < 0.3\sqrt{10})$$

con Z normale standard. Dalle tavole ricaviamo il valore 0.6578.

2) La variabile $U = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = (n-1)S^2$ ha distribuzione chi-quadrato con $n-1$ gradi di libertà. Dunque

$$P(a_1 \le S^2 \le a_2) = P((n-1)a_1 \le (n-1)S^2 \le (n-1)a_2)$$

Chiamo $b_1 = (n-1)a_1$ e $b_2 = (n-1)a_2$. Cerco b_1 e b_2 tali che $P(U < b_1) = 0.05$ e $P(U > b_2) = 0.05$. Dalle tavole ricavo $b_1 = 3.33$, $b_2 = 16.9$ da cui $a_1 = \frac{b_1}{9} = 0.37$ e $a_2 = \frac{b_2}{9} = 1.88$.

Soluzione esercizio 2

1) Abbiamo

$$f_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n;\theta) = \frac{1}{(2\theta+1)^n}\prod_i \mathbf{1}_{(0,2\theta+1)}(x_i)$$

Il prodotto delle funzioni indicatrici equivale a

$$\mathbf{1}_{\{Y_1>0\}}\mathbf{1}_{\{Y_n<2\theta+1\}}$$

con $Y_1 = \min\{X_1,...,X_n\}$ e $Y_n = \max\{X_1,...,X_n\}$. Quindi lo stimatore di massima verosimiglianza per θ è

$$\hat{\Theta} = \frac{Y_n - 1}{2}$$

2) Calcoliamo la varianza della distribuzione:

$$E(X^2) = \frac{1}{2\theta+1}\int_0^{2\theta+1} x^2 dx = \frac{(2\theta+1)^2}{3}$$

mentre ovviamente $E(X) = \frac{2\theta+1}{2}$ da cui $var(X) = \frac{(2\theta+1)^2}{12}$. Dalla proprietà di invarianza degli stimatori di massima verosimiglianza abbiamo dunque che lo stimatore di massima verosimiglianza per la varianza è $\frac{Y_n^2}{12}$.

Soluzione esercizio 3

1) La funzione di distribuzione $F_X(x)$ è nulla per $x < 0$, vale 1 per $x > \theta$ e per $x \in [0, \theta]$ vale
$$\int_0^x \frac{2(\theta - x')}{\theta^2} dx' = \frac{2x}{\theta} - \frac{x^2}{\theta^2}$$

2) Sia $Q := \frac{X}{\theta}$, allora
$$f_Q(q) = \theta\Big(\frac{2}{\theta} - \frac{2q}{\theta}\Big)\mathbf{1}_{(0,1)}(q) = 2(1-q)\mathbf{1}_{(0,1)}(q)$$
dunque Q è pivotale.

3) Abbiamo che l'evento $\{q_1 < Q < q_2\}$ è equivalente a $\{\frac{X}{q_2} < \theta < \frac{X}{q_1}\}$ e dunque $\left(\frac{X}{q_2}, \frac{X}{q_1}\right)$ è l' intervallo di confidenza. Scegliendo q_1 tale che $P(Q < q_1) = 0,05$ e q_2 tale che $P(Q > q_2) = 0,05$ abbiamo il livello di confidenza richiesto. Otteniamo le equazioni seguenti per q_1 e q_2:
$$2\int_0^{q_1} (1-q)dq = 0.05, \qquad 2\int_{q_2}^1 (1-q)dq = 0.05$$
da cui
$$2q_1 - q_1^2 = 0.05 \qquad 1 - 2q_2 + q_2^2 = 0.05$$
e cioè $q_1 = 0,025$ e $q_2 = 0.776$.

Soluzione esercizio 4

H_0 è rifiutato se $Q_5 > \chi^2_{1-\alpha}(5)$ con
$$Q_5 = \sum_{j=1}^{6} \frac{(N_j - n\frac{1}{6})^2}{n\frac{1}{6}}$$
e $\chi^2_{1-\alpha}(5)$ il quantile $1-\alpha$ di χ^2 con 5 gradi di libertà, che dalle tavole risulta essere 11.1. Calcolando Q_5 con i valori ottenuti nei 60 lanci otteniamo $Q_5 = 15,6 > 11.1$ dunque il test è rifiutato.