ST1 - Scritto del 6-4-2006

E. Scoppola

Soluzione esercizio 1

1) Per simmetria le marginali sono uguali. Abbiamo:

$$f_X(x) = \int f_{XY}(x,y)dy = \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)\Big[\int_x^\infty e^{-y}(1-e^{-x})dy + \int_0^x e^{-x}(1-e^{-y})dy\Big] =$$

$$= \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)\Big[(1-e^{-x})e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x}(e^{-x}-1)\Big] = xe^{-x}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$$

2) Sempre per simmetria $E(X) = E(Y) = \int_0^\infty x^2 e^{-x}dx = \Gamma(3) = 2! = 2$

3) Ancora per simmetria $var(X) = var(Y)$. Abbiamo $E(X^2) = \int_0^\infty x^3 e^{-x}dx = \Gamma(4) = 3! = 6$ e dunque $var(X) = 6 - 2^2 = 2$

4) Per calcolare ρ_{XY} calcoliamo prima $E(XY)$.

$$E(XY) = \int_0^\infty \int_0^y xye^{-y}(1-e^{-x})dxdy + \int_0^\infty \int_0^x xye^{-x}(1-e^{-y})dydx$$

e dalla simmetria segue che

$$E(XY) = 2\int_0^\infty ye^{-y}\Big[\int_0^y x(1-e^{-x})dx\Big]dy =$$

$$= \int_0^\infty y^3e^{-y}dy + 2\int_0^\infty y^2e^{-2y}dy + 2\int_0^\infty ye^{-2y}dy - 2\int_0^\infty ye^{-y}dy =$$

$$= \Gamma(4) + \frac{1}{4}\Gamma(3) + \frac{1}{2}\Gamma(2) - 2\Gamma(2) = 5$$

da cui

$$\rho_{XY} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{5-2^2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

Soluzione esercizio 2

1)

$$m_Y(t) = E(e^{2X^2t}) = \int_0^\infty e^{-x^2(1-2t)}2xdx = \frac{1}{1-2t}\int_0^\infty e^{-u}du = \frac{1}{1-2t} = \frac{1/2}{1/2-t}$$

con $2t < 1$

2) Dal punto 1) abbiamo che $Y \sim \Gamma(1, 1/2)$ cioe' una distribuzione esponenziale di parametro 1/2 o analogamente una χ^2_2

3) Poichè $Z \sim \chi^2_2$ abbiamo che $W = \frac{Y}{Z} = \frac{Y/2}{Z/2}$ ha una distribuzione $F(2, 2)$.

Soluzione esercizio 3

1) Se $\hat{\mu}_1$ and $\hat{\mu}_2$ sono le stime per le medie dalla proprietà di invarianza abbiamo $\hat{a} = \frac{\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2}{2} = \frac{1}{2}(\bar{X}_n + \bar{Y}_n)$ e $\hat{b} = \frac{\hat{\mu}_1-\hat{\mu}_2}{2} = \frac{1}{2}(\bar{X}_n - \bar{Y}_n)$

2) Con il metodo dei momenti abbiamo $a = \frac{\mu_1+\mu_2}{2}$ e $b = \frac{\mu_1-\mu_2}{2}$ e sostituendo alle medie le medie campionarie otteniamo gli stessi stimatori del punto 1).

Soluzione esercizio 4

1) Dalla relazione $\mu = \frac{\theta}{2}$ otteniamo lo stimatore dei momenti $\hat{\Theta}_m = 2\bar{X}_n$

2) $E(\hat{\Theta}_m) = \theta$ e $var(\hat{\Theta}_m) = 4var(\bar{X}_n) = \frac{\theta^2}{3n}$

3) $L(\theta; x_1, ..., x_n) = (\frac{1}{\theta})^n \Pi_{i=1}^n \mathbf{1}_{(0,\theta)}(x_i)$. Definendo $y_1 = \min\{x_1, ..., x_n\}$ e $y_n = \max\{x_1, ..., x_n\}$ possiamo scrivere

$$L(\theta; x_1, ..., x_n)(\frac{1}{\theta})^n \mathbf{1}_{\{y_1>0\}} \mathbf{1}_{\{y_n<\theta\}} \mathbf{1}_{\{y_1<y_n\}} \tag{1}$$

Da cui il massimo della funzione verosimiglianza si ottiene per $\hat{\theta} = y_n$ da cui $\hat{\Theta}_v = Y_n := \max\{X_1, ..., X_n\}$

4) La distribuzione di Y_n la ricaviamo da $P(Y_n \leq y) = (\frac{y}{\theta})^n$ per $y \in [0, \theta]$ e $P(Y_n \leq y) = 0$ per $y < 0$ e $P(Y_n \leq y) = 1$ per $y > \theta$ da cui otteniamo la densità $f_{Y_n}(y) = \frac{n}{\theta^n} y^{n-1} \mathbf{1}_{[0,\theta]}(y)$ da cui

$$E(\hat{\Theta}_v) = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta y^n dy = \frac{n}{n+1}\theta \tag{2}$$

$$E(\hat{\Theta}_v^2) = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta y^{n+1} dy = \frac{n}{n+2}\theta^2 \tag{3}$$

e dunque

$$var(\hat{\Theta}_v) = \theta^2 \Big[\frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2}\Big] = \theta^2 \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} \tag{4}$$