ST1 - Scritto del 5-4-2007
E. Scoppola

Soluzione esercizio 1

1) La variabile casuale $\sum_{i=1}^{n} aX_i$ è normale con media $\sum_{i=1}^{n} a(i-1) = a\frac{n(n-1)}{2}$ e varianza $\sum_{i=1}^{n} a^2 = a^2 n$. Dunque se $a = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e $b = -a\frac{n(n-1)}{2} = -\frac{\sqrt{n}(n-1)}{2}$ abbiamo Y normale standard.

2) $\bar{Z}$ ha distribuzione $\mathcal{N}(0, \frac{1}{m})$ e $\sum_{i=1}^{m}(Z_i - \bar{Z})^2$ ha distribuzione χ^2_{m-1} (vd [MGB] pg 250).

3) $\frac{Y^2}{S^2}$ ha distribuzione $F(1, m-1)$ e $\frac{X_1}{S}$ ha distribuzione $t(m-1)$.

4) Le U_i hanno distribuzione χ^2_1 che anche è $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ Dunque $\sum_{i=1}^{m} U_i \sim \Gamma(\frac{m}{2}, \frac{1}{2}) = \chi^2_m$ e quindi $\frac{\bar{U}}{X_1^2} \sim F(m, 1)$.

Soluzione esercizio 2

1) Abbiamo
$$\int x^m \mathbf{1}_{[0,\theta]}(x)dx = \frac{\theta^{m+1}}{m+1}$$
dunque se $C = \frac{m+1}{\theta^{m+1}}$ abbiamo che la funzione $f(x, \theta)$ è una densità.

2)
$$E(X) = \frac{m+1}{m+2}\theta, \quad E(X^2) = \frac{m+1}{m+3}\theta^2, \quad var(X) = \theta^2 \frac{m+1}{(m+2)^2(m+3)}$$

3) Con il metodo dei momenti abbiamo $\bar{X} = \frac{m+1}{m+2}\hat{\Theta}_{mom}$ cioè
$$\hat{\Theta}_{mom} = \frac{m+2}{m+1}\bar{X}$$

4) $E(\hat{\Theta}_{mom}) = \frac{m+2}{m+1}E(\bar{X}) = \theta$ dunque è non distorto. Il suo errore quadratico medio è la sua varianza:
$$var(\hat{\Theta}_{mom}) = \left(\frac{m+2}{m+1}\right)^2 var(\bar{X}) = \left(\frac{m+2}{m+1}\right)^2 \frac{1}{n}\theta^2 \frac{m+1}{(m+2)^2(m+3)} = \frac{1}{n}\theta^2 \frac{1}{(m+1)(m+3)}$$

5) La funzione verosimiglianza è:

$$L(\theta; x_1, ..., x_n) = \Big(\frac{m+1}{\theta^{m+1}}\Big)^n x_1^m ... x_n^m \mathbf{1}_{[0,\theta]}(x_1) ... \mathbf{1}_{[0,\theta]}(x_n) =$$

$$= \Big(\frac{m+1}{\theta^{m+1}}\Big)^n x_1^m ... x_n^m \mathbf{1}_{\{y_1 \geq 0\}} \mathbf{1}_{\{y_n \leq \theta\}}$$

con $y_1 = \min\{x_1, ..., x_n\}$ e $y_n = \max\{x_1, ..., x_n\}$, che è massima per θ minima e dunque

$$\hat{\Theta}_{ver} = Y_n$$

6) La distribuzione di Y_n la ricavo da:

$$P(Y_n \leq y) = \Big[C \int_0^y x^m \, dx\Big]^n = \Big[\frac{y^{m+1}}{\theta^{m+1}}\Big]^n$$

per $y \in [0, \theta]$ mentre $P(Y_n \leq y) = 0$ per $y < 0$ e $P(Y_n \leq y) = 1$ per $y > \theta$. Dunque la sua densità è:

$$f_{Y_n}(y, \theta) = n(m+1) \frac{y^{n(m+1)-1}}{\theta^{n(m+1)}} \mathbf{1}_{[0,\theta]}$$

Abbiamo:

$$E(Y_n) = \theta \frac{n(m+1)}{n(m+1)+1}, \quad E(Y_n^2) = \theta^2 \frac{n(m+1)}{n(m+1)+2}$$

Dunque $\hat{\Theta}_{ver}$ è distorto e la sua varianza è

$$var(Y_n) = \theta^2 \frac{n(m+1)}{(n(m+1)+2)(n(m+1)+1)^2}$$

L'errore quadratico medio risulta quindi:

$$MSE(Y_n) = var(Y_n) + \Big[\theta - E(Y_n)\Big]^2 =$$

$$= \theta^2 \frac{2}{(n(m+1)+2)(n(m+1)+1)}$$

Per grandi n abbiamo dunque $MSE(Y_n) \simeq \frac{2\theta^2}{(n(m+1))^2} \ll MSE(\hat{\Theta}_{mom})$.