ST1 - Scritto del 4-7-2007
E. Scoppola

Soluzione esercizio 1

1) Dalla funzione generatrice dei momenti per la variabile X ottengo

$$m_{\frac{\lambda}{\mu}X}(t) = m_X(\frac{\lambda}{\mu}t) = \frac{\lambda}{\lambda - \frac{\lambda}{\mu}t} = \frac{\mu}{\mu - t}$$

dunque $\frac{\lambda}{\mu}X + Y$ ha distribuzione $\Gamma(2, \mu)$.

2) Se $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ la distribuzione coincide con quella χ^2_2 e allora $\frac{X}{Y} \sim F(2,2)$

3) $P(X = Z) = P(X \leq Y) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$

Soluzione esercizio 2

1) Abbiamo $E(X) = 0$ e $E(X^2) = \frac{\theta^2}{3}$. Dall'equazione $E(X^2) = M_2' := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$ ricaviamo

$$\hat{\Theta}_{mom} = \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2}$$

2) La funzione verosimiglianza é:

$$L(\theta; x_1, ..., x_n) = \frac{1}{(2\theta)^n}\prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{(-\theta,\theta)}(x_i) = \frac{1}{(2\theta)^n}\mathbf{1}_{\{y_1 > -\theta\}}\mathbf{1}_{\{y_n < \theta\}}$$

con $y_1 := \min\{x_1, ..., x_n\}$ e $y_n := \max\{x_1, ..., x_n\}$. Dunque abbiamo

$$\hat{\Theta}_{mv} = \max\{(-Y_1), Y_n\}$$

Soluzione esercizio 3

1) La densità di Poisson appartiene alla famiglia esponenziale con $d(x) = x$ (vd. Esempio 7.25 pg 318), e dunque $\sum_{i=1}^n X_i$ é una statistica sufficiente minimale completa.

2) Dal lemma di Scheffé $\bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ é UMVUE di λ.

3) $var(\bar{X}) = \frac{\lambda}{n}$. D'altra parte abbiamo:

$$E\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln f(X;\lambda)\Big)^2\Big] = \frac{1}{\lambda}$$

e dunque il limite inferiore di Cramer-Rao per λ é: $\frac{\lambda}{n} = var(\bar{X})$.

4) La media campionaria $\bar{X}$ é anche lo stimatore di massima verosimiglianza di λ e dunque per la proprietá di invarianza degli stimatori di massima verosimiglianza abbiamo per $\tau(\lambda) = e^{-\lambda}$ lo stimatore $e^{-\bar{X}}$. Poichè $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Poiss(n\lambda)$ abbiamo

$$E(e^{-\bar{X}}) = \exp\{n\lambda(e^{-\frac{1}{n}} - 1)\}$$

e dunque lo stimatore é distorto.

5) Il limite inferiore di Cramer-Rao di $\tau(\lambda) = e^{-\lambda}$ é

$$\frac{\lambda e^{-2\lambda}}{n}$$

6) UMVUE di $e^{-\lambda}$ é:

$$\Big(\frac{n-1}{n}\Big)^{\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

(vd. pg. 332-333)

Soluzione esercizio 4

1) La funzione potenza é

$$\pi_Y(\theta) = P_\theta(rifiutare\, H_0) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \theta x^{\theta-1} dx = 1 - \Big(\frac{1}{2}\Big)^{\theta}$$

L'ampiezza per definizione é $\sup_{\theta\in\Theta_0} \pi_Y(\theta)$ e poichè la potenza é una funzione crescente, il sup si ottiene per $\theta \to 1$ e quindi l'ampiezza é $\frac{1}{2}$.

2) Il test più potente é quello di verosimiglianza semplice:

$$\lambda := \frac{L(\theta_0, x)}{L(\theta_1, x)} = 2x \leq k^*$$

se $x \in C^*$ da cui $C^* = \{x \leq \frac{k^*}{2}\}$. Quindi data l'ampiezza α abbiamo:

$$\alpha = P_{\theta=2}(rifiutare\, H_0) = \int_0^{\frac{k^*}{2}} 2x\, dx = \frac{(k^*)^2}{4} = \alpha$$

da cui $k^* = 2\sqrt{\alpha}$

3) La densitá appartiene alla famiglia esponenziale con

$$a(\theta) = \theta,\ b(x) = \mathbf{1}_{(0,1)}(x),\ c(\theta) = \theta - 1,\ d(x) = \ln x$$

con $c(\theta)$ funzione crescente. Dal teorema 9.5. (pg. 423) abbioamo la regione critica

$$C^* = \{x : \ln x > K^*\}$$

con K^* definito dall'equazione

$$\alpha = P_2(\ln X > K^*) = P_2(X > e^{K^*}) = 1 - e^{2K^*}$$

da cui $K^* = \frac{1}{2}\ln(1-\alpha)$.

(Osservazione: nella correzione di questo ultimo punto ho tenuto conto dell'errore delle disuguaglianze nel testo dell'esercizio distribuito in aula.)