ST1 - Scritto del 14-9-2006
E. Scoppola

Soluzione esercizio 1

1) La funzione generatrice dei momenti per una variabile con distribuzione $\Gamma(k, \lambda)$ è
$$m_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^k$$
e quindi in questo caso
$$m_X(t) = \left(\frac{1}{1 - 2t}\right)^k$$
e quindi
$$m_{\bar{X}}(t) = E(e^{\frac{t}{n}\sum_{i=1}^n X_i}) = \prod_{i=1}^n m_{X_i}(\frac{t}{n}) = \left(\frac{1}{1 - \frac{2t}{n}}\right)^{kn}$$
cioè la media campionaria ha distribuzione $\Gamma(kn, \frac{n}{2})$.

2)
$$X_1 \sim \Gamma(k, \frac{1}{2}) = \chi^2_{2k}$$
da cui
$$Z = \frac{U/m}{X_1/2k} \sim F(m, 2k)$$

3)
$$EZ = \frac{2k}{2k - 2} = \frac{k}{k - 1}$$

Soluzione esercizio 2

1) Per una variabile poissoniana di parametro λ abbiamo la funzione generatrice dei momenti
$$m_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$
e dunque
$$m_S(t) = e^{n\lambda(e^t - 1)}$$
da cui S ha distribuzione di Poisson con parametro $n\lambda$.

2) $EX = \lambda$ e dunque lo stimatore con il metodo dei momenti di λ è:

$$\hat{\lambda}_m = \bar{X}$$

3) La funzione di verosimiglianza è:

$$f_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n;\lambda) = \frac{\lambda^{\sum_i x_i} e^{-n\lambda}}{x_1!...x_n!}$$

da cui otteniamo

$$\frac{\partial \ln f_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n;\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_i x_i - n = 0$$

da cui lo stimatore di massima verosimiglianza coincide di nuovo con la media campionaria

$$\hat{\lambda}_{mv} = \bar{X}.$$

4) Il campione appartiene alla famiglia esponenziale infatti

$$f_X(x;\lambda) = a(\lambda)b(x)e^{c(\lambda)d(x)}$$

con

$$a(\lambda) = e^{-\lambda}, \quad b(x) = \frac{1}{x!}\mathbf{1}_{\{0,1,2,...\}}(x), \quad c(\lambda) = \ln\lambda, \quad d(x) = x$$

da cui possiamo concludere che $\sum_i d(X_i) = S$ è una statistica sufficiente e completa

5) $\bar{X}$ è UMVUE di λ per il teorema di Lehmann-Scheffé poichè è funzione di S.

6) T_1 e T_2 sono stimatori di $\tau(\lambda)$ non distorti infatti:

$$ET_1 = \frac{1}{n}\sum_i P(X_i = 0) = \frac{1}{n}\sum_i e^{-\lambda} = e^{-\lambda}$$

$$ET_2 = E\Big(\frac{n-1}{n}\Big)^S = \sum_{s=0}^{\infty}(\frac{n-1}{n})^s e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^s}{s!} = e^{-\lambda}$$

e poichè T_2 è una funzione di S allora è UMVUE di $\tau(\lambda)$.

Soluzione esercizio 3

Calcoliamo il rapporto delle verosimiglianze:

$$\lambda = \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = \frac{3x^2}{2x}\mathbf{1}_{(0,1)}(x)$$

e dunque la condizione $\lambda < K^*$ è equivalente alla condizione $x < \frac{2}{3}K^*$. Imponendo

$$\alpha = 0.05 = P_{\theta_0}(x < \frac{2}{3}K^*) = \int_0^{\frac{2}{3}K^*} 3x^2 dx = \left(\frac{2}{3}K^*\right)^3$$

otteniamo per K^* la condizione $\left(\frac{2}{3}K^*\right)^3 = 0.05$ e quindi per il lemma di Neyman-Pearson il test piu' potente è quello con regione critica

$$C^* = \{x : \ x < 0.3684\}.$$