ST1 - Scritto del 11-1-2007
E. Scoppola

Soluzione esercizio 1

1)
$$U \sim \Gamma(n, \theta)$$
(vd. MGB pg. 202)

2)
$$\bar{X} \sim \Gamma(n, n\theta)$$
(vd. MGB pg. 245)

3) Per $\theta = \frac{1}{2}$, poiche' $\exp(\frac{1}{2}) = \Gamma(1, \frac{1}{2}) = \chi_2^2$ allora $\frac{X_i}{X_j} \sim F(2, 2)$.

Soluzione esercizio 2

1) Siano Y_i le variabili a valori $\{0, 1\}$ con $Y_i = 1$ se e solo se l'altezza dell'i-emo individuo è maggiore di h. Le variabili Y_i hanno distribuzione di Bernoulli di parametro θ. Abbiamo dunque $EY_i = \theta$ e $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, dunque $\frac{Z_n}{n}$ è uno stimatore non distrorto di θ. Per la legge dei grandi numeri la sua distribuzione asintotica è normale infatti
$$\sqrt{n}(\frac{Z_n}{n} - \theta) \to^{legge} \mathcal{N}(0, \theta(1 - \theta))$$

2) $\frac{Z_n}{n}$ è lo stimatore di massima verosimiglianza di θ (vd MGB pg. 287).

Soluzione esercizio 3

(Y_1, Y_n) è un intervallo di confidenza se $Y_1 \leq Y_n$ e
$$P(Y_1 < \theta < Y_n) = \gamma$$
con γ indipendente da θ. Abbiamo che
$$P(\theta \notin (Y_1, Y_n)) = P(\{Y_i < \theta, \forall i\} \cup \{Y_i > \theta, \forall i\}) = (\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{2})^n$$
da cui $\gamma = 1 - 2(\frac{1}{2})^n$.

Soluzione esercizio 4

Sappiamo che

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim \mathcal{N}(\mu_x - \mu_y, \frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m})$$

Allora quando H_0 è vera si ha che

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

e quindi

$$P_{H_0}(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

con $z_{\frac{\alpha}{2}}$ quantile della distribuzione normale standard. Da cui otteniamo $c = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}$.