ST1 - I Esonero: 6-4-2006
E. Scoppola

Esercizio 1

Siano X e Y variabili casuali con densità congiunta

$$f_{XY}(x,y) = e^{-y}(1-e^{-x})\mathbf{1}_{(0,y)}(x)\mathbf{1}_{[0,\infty)}(y)+e^{-x}(1-e^{-y})\mathbf{1}_{(0,x)}(y)\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) \quad (1)$$

1) Calcolare le marginali.
2) Calcolare $E(X)$ e $E(Y)$.
3) Calcolare $var(X)$ e $var(Y)$
4) (*facoltativo*) Calcolare il coefficiente di correlazione ρ_{XY}.

Esercizio 2

Sia X una variabile casuale con densità

$$f_X(x) = 2xe^{-x^2}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) \quad (2)$$

1) Calcolare la funzione generatrice dei momenti di $Y = 2X^2$.
2) Determinare la distribuzione di Y.
3) Se Z è una variabile casuale con distribuzione χ^2_2, determinare la distribuzione di $W = \frac{Y}{Z}$.

Esercizio 3

Sia $X_1, ..., X_n$ un campione casuale estratto dalla densità $\mathcal{N}(a+b, \sigma^2)$ e $Y_1, ..., Y_n$ un campione casuale estratto dalla densità $\mathcal{N}(a-b, \sigma^2)$

1) Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza per a e b.
2) Quali sarebbero gli stimatori di a e b usando il metodo dei momenti?

Esercizio 4

Si consideri un campione casuale di ampiezza n dalla distribuzione uniforme sull'intervallo $[0, \theta]$, cioe' dalla densità

$$f(x) = \frac{1}{\theta}\mathbf{1}_{[0,\theta]}(x) \quad (3)$$

1) Determinare lo stimatore $\hat{\Theta}_m$ di θ con il metodo dei momenti.

2) Calcolare $E(\hat{\Theta}_m)$ e $var(\hat{\Theta}_m)$.

3) Determinare lo stimatore $\hat{\Theta}_v$ di θ con il metodo della massima verosimiglianza.

4) Calcolare $E(\hat{\Theta}_v)$ e $var(\hat{\Theta}_v)$.

Si ricorda che la densità della distribuzione $\Gamma(r, \lambda)$ è

$$f(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(r)}(\lambda x)^{r-1}e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) \tag{4}$$

dove $\Gamma(r)$ è la funzione Gamma o funzione di Eulero definita da

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty y^{r-1}e^{-y}dy \qquad t > 0 \tag{5}$$

La distribuzione χ^2_k è un caso particolare di una distribuzione Gamma con parametri $r = \frac{k}{2}$ e $\lambda = \frac{1}{2}$. Si ricorda infine che la densità della $F(m, n)$ è data da:

$$\frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\frac{x^{(m-2)/2}}{[1 + (m/n)x]^{(m+n)/2}}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) \tag{6}$$