ST1 - I Esonero 5-4-2007
E. Scoppola

Esercizio 1

Sia $X_1, ..., X_n$ una famiglia di variabili casuali con $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, 1)$ con $\mu_i = i - 1$ e $Z_1, ..., Z_m$ un campione casuale da una distribuzione normale standard.

1) Determinare i coefficienti a e b con tali che

$$Y := a \sum_{i=1}^{n} X_i + b$$

sia normale standard.

2) Si calcoli la distribuzione della media campionaria $\bar{Z}$ e di $\sum_{i=1}^{m}(Z_i - \bar{Z})^2$.

3) Determinare la distribuzione di $\frac{Y^2}{S^2}$ e di $\frac{X_1}{S}$dove S^2 è la varianza campionaria del campione $Z_1, ..., Z_m$

4) Si consideri il campione casuale: $U_i = Z_i^2$ con $i = 1, ..., m$. Determinare la distribuzione di $\frac{\bar{U}}{X_1^2}$.

Esercizio 2

Si consideri la funzione:

$$f(x, \theta) = Cx^m \mathbf{1}_{[0,\theta]}(x)$$

con $\theta > 0$, $m \geq 0$.

1) Calcolare la costante C tale che $f(x, \theta)$ sia una densità.

2) Si calcoli $E(X)$ e $var(X)$ per X variabile casuale con questa densità.

Si consideri un campione casuale di ampiezza n da questa densità.

3) Determinare lo stimatore di θ con il metodo dei momenti.

4) E' distorto? Calcolare il suo errore quadratico medio.

5) Determinare lo stimatore di θ di massima verosimiglianza.

6) E' distorto? Calcolare il suo errore quadratico medio.