ST1 -Scritto del 4-7-2007

E. Scoppola

Per il recupero del I esonero svolgere gli esercizi 1 e 2, per il II svolgere gli esercizi 3 e 4.

Esercizio 1

Siano X e Y due variabili casuali indipendenti con distribuzioni esponenziali di parametro λ e μ rispettivamente.

1) Determinare la distribuzione di $\frac{\lambda}{\mu}X + Y$.

2) Se $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, si calcoli la distribuzione di $\frac{X}{Y}$.

3) Sia $Z = \min(X, Y)$, calcolare $P(X = Z)$.

Esercizio 2

Sia $X_1, ..., X_n$ un campione casuale dalla distribuzione uniforme sull'intervallo $(-\theta, \theta)$.

1) Determinare lo stimatore di θ con il metodo dei momenti.

2) Determinare lo stimatore di θ di massima verosimiglianza.

Esercizio 3

Sia $X_1, ..., X_n$ un campione casuale dalla distribuzione di Poisson di parametro λ.

1) Trovare una statistica sufficiente minimale completa.

2) Trovare un UMVUE di λ.

3) Calcolare il limite inferiore di Cramer-Rao per lo stimatore di λ e confrontalo con la varianza dell'UMVUE trovato al punto precedente.

4) Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza di $\tau(\lambda) = e^{-\lambda}$. E' distorto?

5) Calcolare il limite inferiore di Cramer-Rao per lo stimatore di $e^{-\lambda}$.

6) Trovare un UMVUE di $e^{-\lambda}$.

Esercizio 4

Sia X una singola variabile casuale dalla densitá

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}\mathbf{1}_{(0,1)}(x)$$

con $\theta > 0$.

1) Per verificare $H_0 : \ \theta \leq 1$ contro $H_1 : \ \theta > 1$ si consideri il test: si rifiuti H_0 se $X \geq \frac{1}{2}$. Calcolare la funzione di potenza e l'ampiezza del test.

2) Determinare un test piú potente di ampiezza α per $H_0 : \ \theta = 2$ contro $H_1 : \ \theta = 1$

3) Esiste un test uniformemente piú potente di ampiezza α per $H_0 : \ \theta \leq 2$ contro $H_1 : \ \theta > 2$? Se si, qual é?