

**ST1 - Scritto del 14-9-2006**  
E. Scoppola

**Esercizio 1**

Sia  $X_1, \dots, X_n$  un campione casuale dalla distribuzione gamma di parametri  $k$  e  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

- 1) Determinare la distribuzione della media campionaria.
- 2) Se  $U$  è una variabile casuale con distribuzione chi-quadrato con  $m$  gradi di libertà, determinare la distribuzione di  $Z = \frac{2k}{m} \frac{U}{X_1}$ .
- 3) Calcolare  $EZ$ .

**Esercizio 2**

Sia  $X_1, \dots, X_n$  un campione casuale dalla distribuzione Poissoniana di parametro  $\lambda$ .

- 1) Determinare la funzione generatrice dei momenti e la distribuzione di  $S = \sum_{i=1}^n X_i$ .
- 2) Si calcoli lo stimatore per  $\lambda$  con il metodo dei momenti.
- 3) Si calcoli lo stimatore di massima verosimiglianza per  $\lambda$ .
- 4) Trovare una statistica completa sufficiente.
- 5) Determinare un UMVUE di  $\lambda$ .
- 6) Dimostrare che le statistiche

$$T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{0\}}(X_i)$$

$$T_2 = \left(\frac{n-1}{n}\right) \sum_{i=1}^n X_i$$

sono stimatori non distorti di  $\tau(\lambda) = e^{-\lambda}$ . Determinare un UMVUE di  $\tau(\lambda)$ .

**Esercizio 3**

Sia  $n = 1$  e  $X_1$  una variabile casuale con densità

$$f_X(x; \theta) = \theta x^{\theta-1} \mathbf{1}_{(0,1)}(x) \tag{1}$$

Trova il test più potente di ampiezza  $\alpha = 0.05$  per  $H_0 : \theta = 3$  contro  $H_1 : \theta = 2$

**Per la prima parte si svolga l'esercizio 1 e le domande 1, 2, 3 dell'esercizio 2.**

**Per la seconda parte si svolga l'esercizio 3 e le domande 4, 5, 6 dell'esercizio 2.**