ST1 - Scritto del 11-1-2007
E. Scoppola

Esercizio 1

Sia $X_1, ..., X_n$ un campione casuale dalla distribuzione esponenziale di parametro θ.

1) Si Calcoli la distribuzione di $U = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
2) Si calcoli la distribuzione della media campionaria.
3) Per $\theta = \frac{1}{2}$ si calcoli la distribuzione di $\frac{X_i}{X_j}$ per $i \neq j$.

Esercizio 2

Si vuole stimare la frazione θ di individui di una popolazione per i quali l'altezza è maggiore di un valore fissato h. Per questo vengono scelti a caso e in modo indipendente n individui e di ciascuno viene misurata l'altezza. Sia Z_n il numero di individui più alti di h.

1) $\frac{Z_n}{n}$ è uno stimatore non distorto di θ? Qual'è la sua distribuzione asintotica?
2) Si calcoli lo stimatore di massima verosimiglianza per θ.

Esercizio 3

Sia $X_1, ..., X_n$ un campione casuale dalla distribuzione uniforme su un intervallo di ampiezza a e centro θ. Siano

$$Y_1 = \min\{X_1, ..., X_n\}, \qquad Y_n = \max\{X_1, ..., X_n\},$$

Dimostrare che (Y_1, Y_n) è un intervallo di confidenza per θ e calcolarne il livello di confidenza.

Esercizio 4

Siano $X_1, ..., X_n$ e $Y - 1, ..., Y_m$ due campioni casuali indipendenti da due popolazioni normali di medie incognite μ_x e μ_y e varianze note σ_x^2, σ_y^2. Vogliamo verificare l'ipotesi

$$H_0 : \quad \mu_x = \mu_y$$

contro l'ipotesi

$$H_1: \quad \mu_x \neq \mu_y$$

Consideriamo il test:

si rifiutaH_0 se $|\bar{X} - \bar{Y}| > c$ e si accetta se $|\bar{X} - \bar{Y}| \leq c$.

Calcolare il valore di c che rende questo test di ampiezza (o livello di significatività) α.