Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di ST1 - A.A. 2006/2007
Docente: Prof.ssa E. Scoppola - Tutore: Dott. Nazareno Maroni

Soluzioni del tutorato n.8 del 22/5/2007

Esercizio 1. Sappiamo che

$$f_Y(y) = \frac{\beta^2}{\Gamma(2)} y e^{-\beta y},$$

calcoliamo, quindi, la densità di Z tramite il cambio di variabili:

$$f_Z(z) = f_Y\left(\frac{z}{2\beta}\right)\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z}{2\beta}\right| = \beta^2\frac{z}{2\beta}e^{-\beta\frac{z}{2\beta}}\frac{1}{2\beta} = \frac{z}{4}e^{-\frac{z}{2}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)2^{\frac{4}{2}}}z^{\frac{4}{2}-1}e^{-\frac{z}{2}} = f_{\chi^2_4}(z).$$

Calcoliamo la funzione generatrice dei momenti di $Z = 2\beta Y$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{t2\beta Y}\right) &= \int_0^{+\infty}\beta^2 y e^{y(2\beta t-\beta)}\mathrm{d}y = \frac{\beta^2 y}{2\beta t-\beta}e^{y(2\beta t-\beta)}\Bigg|_0^{+\infty} + \\
&\quad - \int_0^{+\infty}\frac{\beta^2}{2\beta t-\beta}e^{y(2\beta t-\beta)}\mathrm{d}y = -\frac{\beta^2}{(2\beta t-\beta)^2}e^{y(2\beta t-\beta)}\Bigg|_0^{+\infty} = \\
&= \frac{\beta^2}{(2\beta t-\beta)^2} = \frac{1}{(1-2t)^2} = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{4}{2}} \qquad t < \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

e questa è la f.g.m. di una χ^2_4.
Troviamo l'intervallo di confidenza di livello $0,90$:

$$0,90 = \mathbb{P}(\chi^2_{4,0,05} \leqslant Z \leqslant \chi^2_{4,0,95}) = \mathbb{P}(0,711 \leqslant 2\beta Y \leqslant 9,49) = \mathbb{P}\left(\frac{0,711}{2Y} \leqslant \beta \leqslant \frac{9,49}{2Y}\right).$$

Esercizio 2. Si deve calcolare la distribuzione del massimo di n variabili uniformi su $(0,\theta)$ ed è

$$F_{Y_{(n)}}(y) = \left(\frac{y}{\theta}\right)^n, \qquad f_{Y_{(n)}}(y) = \frac{n}{\theta^n}y^{n-1}.$$

a) Calcoliamo prima la densità di U e poi la integriamo per ottenere la funzione di distribuzione.

$$f_U(u) = \frac{n}{\theta^n}(\theta u)^{n-1}\theta = nu^{n-1}$$

Ovviamente è $0 \leqslant U \leqslant 1$, poiché $0 \leqslant Y_i \leqslant \theta\ \forall\, i$, quindi $0 \leqslant Y_{(n)} \leqslant \theta$ e quindi $0 \leqslant U = \frac{Y_{(n)}}{\theta} \leqslant 1$. Integrando la densità si ha:

$$F_U(u) = \int_0^u nx^{n-1}\mathrm{d}x = x^n\Big|_0^u = u^n, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1.$$

b) Sappiamo che

$$\mathbb{P}(U \leqslant a) = a^n = 0,95 \quad \Leftrightarrow \quad a = \sqrt[n]{0,95}.$$

Quindi

$$0,95 = \mathbb{P}(U \leqslant \sqrt[n]{0,95}) = \mathbb{P}\left(\frac{Y_{(n)}}{\theta} \leqslant \sqrt[n]{0,95}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{Y_{(n)}}{\sqrt[n]{0,95}} \leqslant \theta\right).$$

Esercizio 3. Stimiamo la differenza $p_1 - p_2$ tramite la differenza $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ delle proporzioni di fallimento nei campioni. Scriviamo

$$\hat{p}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} Y_i^{(1)} \qquad \text{e} \qquad \hat{p}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} Y_i^{(2)}$$

dove $Y_i^{(1)} \sim Bernoulli(p_1, q_1 = 1 - p_1)$ e $Y_i^{(2)} \sim Bernoulli(p_2, q_2 = 1 - p_2)$. Quindi

$$\mathbb{E}(\hat{p}_1) = p_1, \qquad \mathbb{E}(\hat{p}_2) = p_2 \quad \text{e} \quad \mathbb{E}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = p_1 - p_2$$
$$Var(\hat{p}_1) = \frac{p_1 q_1}{n_1}, \qquad Var(\hat{p}_2) = \frac{p_2 q_2}{n_2}$$

e

$$Var(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = Var(\hat{p}_1) + Var(\hat{p}_2) = \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}$$

Sappiamo, per il teorema del limite centrale, che $\dfrac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{Var(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}}$ può essere approssimata con una $N(0,1)$ per campioni abbastanza grandi e che l'approssimazione resta valida se usiamo l'approssimazione per la varianza che si ottiene sostituendo $p_1 \leftrightarrow \hat{p}_1, q_1 \leftrightarrow \hat{q}_1, p_2 \leftrightarrow \hat{p}_2, q_2 \leftrightarrow \hat{q}_2$.

$$\begin{aligned}
0,98 &= \mathbb{P}\left(z_{0,01} \leqslant \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}} \leqslant -z_{0,01}\right) = \\
&= \mathbb{P}\left((\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z_{0,01}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}} \leqslant p_1 - p_2 \leqslant (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{0,01}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}\right) = \\
&= \mathbb{P}(-0,1452 \leqslant p_1 - p_2 \leqslant 0,2252),
\end{aligned}$$

dove si sono sostituiti i valori di $\hat{p}_1, \hat{q}_1, \hat{p}_2, \hat{q}_2, n_1, n_2$ e $z_{0,01}$ è il quantile di livello $0,01$ di una normale standard.

Esercizio 4. Calcoliamo il rapporto di verosimiglianza.

$$\frac{L(\sigma_0^2)}{L(\sigma_1^2)} = \frac{\sigma_1 e^{-\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma_0^2}}}{\sigma_0 e^{-\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma_1^2}}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} e^{-\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma_0^2}+\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma_1^2}} \leqslant k$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 + \frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 \leqslant k_1$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 \left(\frac{1}{2\sigma_1^2} - \frac{1}{2\sigma_0^2}\right) \leqslant k_1$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 \left(\frac{\sigma_0^2-\sigma_1^2}{2\sigma_0^2\sigma_1^2}\right) \leqslant k_1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 \geqslant k^*$$

Quindi una generica regione critica è data da $C = \left\{(X_1,\dots,X_n)\Big|\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2 \geqslant k^*\right\}$.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 \geqslant k^* \Big| \sigma_0^2\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2 \geqslant \frac{\chi^2_{n,0,95}\sigma_0^2}{\sigma_0^2}\Big|\sigma_0^2\right) =$$
$$= \mathbb{P}(\chi^2_n \geqslant \chi^2_{n,0,95}) = 0,05$$

Esercizio 5.

(a)

$$\mathbb{P}(\text{rifiutare } \mathbb{H}_0|\theta_0) = \mathbb{P}(|X|>2|\theta_0) = \mathbb{P}(X<-2)+\mathbb{P}(X>2) = 2\mathbb{P}(X<-2) =$$
$$= 2\Phi(-2) = 0,0456.$$
$$\mathbb{P}(\text{accettare } \mathbb{H}_0|\theta_1) = \mathbb{P}(|X|\leqslant 2|\theta_1) = \mathbb{P}(-2\leqslant X\leqslant 2) =$$
$$= \mathbb{P}\Big(-\frac{3}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{X-1}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \Phi\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) - \Phi\Big(-\frac{3}{\sqrt{2}}\Big) = 0,741.$$

La potenza del test sotto $\mathbb{H}_1$ è data da:
$\mathbb{P}(\text{rifiutare } \mathbb{H}_0|\theta_1) = \mathbb{P}(|X|>2|\theta_1) = \mathbb{P}(X<-2|\theta_1)+\mathbb{P}(X>2|\theta_1) =$
$= \mathbb{P}\left(\frac{X-1}{\sqrt{2}} < \frac{-2-1}{\sqrt{2}}\Big|\theta_1\right) + \mathbb{P}\left(\frac{X-1}{\sqrt{2}} > \frac{2-1}{\sqrt{2}}\Big|\theta_1\right) = \Phi\left(\frac{-3}{\sqrt{2}}\right) + \Phi\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right).$

(b) $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}}{\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{4}}} = \sqrt{2}e^{-\frac{x^2+2x-1}{4}} \le k^* \;\Leftrightarrow\; -x^2-2x+1 \le k' \;\Leftrightarrow\; x^2+2x-1\ge k \;\Rightarrow$
la regione critica è $C = \{x|x^2+2x-1\ge k\}$.