ESERCIZI DI STATISTICA

Stimatori puntuali e loro proprietà, statistiche.

A cura di Nazareno Maroni

Esercizio 1. Siano $X_1, \dots, X_n$ variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite (in breve iid) tali che $X_i \sim f(x, \theta) = \frac{1}{\theta}, \quad 0 < x \leqslant \theta, \ \theta > 0$. Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza (in breve SMV), dire se è corretto e nel caso lo sia asintoticamente trovare uno stimatore corretto.

Esercizio 2. Sia X una variabile casuale avente densità $f(x, \theta) = \theta x^{\theta - 1}, \quad 0 < x < 1$, $\theta > 0$. Trovare lo SMV.

Esercizio 3. Sia X una v.c. avente densità $f(x, \theta) = e^{-(x-\theta)}, \quad x \geqslant \theta, \ \theta \in \mathbb{R}$. Trovare lo SMV e dire se è corretto.

Esercizio 4. Supponiamo che $\mathbb{E}(\hat{\theta}_1) = \mathbb{E}(\hat{\theta}_2) = \theta$, $Var(\hat{\theta}_1) = \sigma_1^2$ e $Var(\hat{\theta}_2) = \sigma_2^2$. Consideriamo lo stimatore $\hat{\theta}_3 = a\hat{\theta}_1 + (1-a)\hat{\theta}_2$.

a) Mostrare che $\hat{\theta}_3$ è uno stimatore corretto per θ.

b) Se $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ sono indipendenti, qual è il valore di a che minimizza la varianza di $\hat{\theta}_3$?

Esercizio 5. Considerate l'esercizio 4. Qual è il valore di a che minimizza la varianza di $\hat{\theta}_3$ se $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ non sono indipendenti ma tali che $Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = c \neq 0$?

Esercizio 6. Siano $Y_1, \dots, Y_n$ variabili casuali provenienti da una densità tale che $f(y, \theta) = \theta y^{\theta - 1}, \quad 0 < y < 1, \ \theta > 0$. Mostrate che $\overline{Y}$ è uno stimatore consistente di $\frac{\theta}{\theta + 1}$.

Esercizio 7. Supponiamo che $Y_1, \dots, Y_n \sim N(\mu, 1)$. Considerate la prima realizzazione Y_1 come stimatore di μ.

a) Mostrate che Y_1 è uno stimatore non distorto per μ.

b) Calcolate $\mathbb{P}(|Y_1 - \mu| \leqslant 1)$.

c) Basandovi sul risultato ottenuto in b) e sulla definizione di consistenza, Y_1 è uno stimatore consistente per μ?

Esercizio 8. Siano $Y_1, \dots, Y_n \sim N(\mu, \sigma^2)$.

a) Se μ non è nota mentre σ^2 è nota, mostrate che $\overline{Y}$ è una statistica sufficiente per μ.

b) Se μ è nota mentre σ^2 non è nota, mostrate che $\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \mu)^2$ è una statistica sufficiente per σ^2.

c) Se μ e σ^2 sono entrambe non note, mostrate che $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ e $\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$ sono statistiche congiuntamente sufficienti per μ e σ^2.

Esercizio 9. Siano $Y_1, \ldots, Y_n \sim Be(p)$. Trovare un UMVUE per p.

Esercizio 10. Siano $Y_1, \ldots, Y_n \sim f(y, \theta) = \frac{2y}{\theta} e^{-\frac{y}{\theta^2}}, \quad y > 0, \theta > 0$. Trovare un UMVUE per θ.

Esercizio 11. Siano $Y_1, \ldots, Y_n \sim f(y, \theta) = \frac{3y^2}{\theta^3}, \quad 0 \leqslant y \leqslant \theta$. Trovate lo stimatore di massima verosimiglianza, dite se è un UMVUE e in caso non lo fosse trovatene uno.

Esercizio 12. Siano $Y_1, \ldots, Y_n \sim Gamma(\alpha, \beta)$. Trovare, tramite il metodo dei momenti, degli stimatori per α e β.

Esercizio 13. Siano $Y_1, \ldots, Y_n \sim f(y, \theta) = (\theta + 1) y^{\theta}, \quad 0 < y < 1, \ \theta > -1$. Trovare, tramite il metodo dei momenti, uno stimatore per θ.