ESERCIZI DI STATISTICA

Soluzioni degli esercizi sugli stimatori puntuali.

A cura di Nazareno Maroni

Soluzione dell'esercizio 1. Troviamo, come primo passo, la funzione di verosimiglianza che è:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{\{0<x_i\leqslant\theta\}}(x_i) = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{\theta\geqslant x_i\}}(\theta) = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{\{\theta\geqslant x_{(n)}\}}(\theta)$$

Con $x_{(i)}$ si intende la i-esima delle realizzazioni, ordinate dalla più piccola alla più grande, mentre con $X_{(1)}$ e $X_{(n)}$ si intendono, rispettivamente, la variabile casuale $\min_i\{X_i\}$ e la v.c. $\max_i\{X_i\}$. L'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che il prodotto delle funzioni indicatrici non è 0 se sono tutte non nulle e ciò avviene se $\theta \geqslant x_i \ \forall\, i \Leftrightarrow \theta \geqslant \max_i x_i$. Si vede che la funzione di verosimiglianza è decrescente e quindi il massimo è assunto in $x_{(n)}$ e quindi lo SMV è $\hat{\Theta} = \max_i X_i = X_{(n)}$.
Dobbiamo calcolare il valore atteso di questo stimatore e per farlo abbiamo bisogno di conoscere la sua distribuzione.

$$\begin{aligned} F_{\hat{\Theta}}(x) &= \mathbb{P}(\hat{\Theta} \leqslant x) = \mathbb{P}(X_{(n)} \leqslant x) = \mathbb{P}(X_i \leqslant x,\ \forall\, i) = \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leqslant x) = \prod_{i=1}^{n} \int_0^x \frac{1}{\theta}\, \mathrm{d}y_i = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n \end{aligned}$$

$$f_{\hat{\Theta}}(x) = \frac{n}{\theta^n} x^{n-1}$$

$$\mathbb{E}(\hat{\Theta}) = \int_0^{\theta} x \frac{n}{\theta^n} x^{n-1}\, \mathrm{d}x = \frac{n}{\theta^n} \frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^{\theta} = \frac{n\theta}{n+1}$$

Quindi lo SMV non è corretto ma è asintoticamente corretto. Un plausibile stimatore corretto è $\hat{\Theta}_1 = \dfrac{n+1}{n}\hat{\Theta} = \dfrac{n+1}{n} X_{(n)}$.

Soluzione dell'esercizio 2. Scriviamo la funzione di verosimilianza:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta x_i^{\theta-1} \mathbb{1}_{\{0<x_i<1\}}(x_i) = \theta^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta-1}$$

Scriviamo la funzione di log-verosimoglianza:

$$l(\theta) = \ln L(\theta) = n \ln \theta + (\theta - 1) \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

Troviamo ora il massimo di $l(\theta)$.

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0\quad\Leftrightarrow\quad\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$$

Quindi lo SMV è $\hat{\Theta}=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

Soluzione dell'esercizio 3. Calcoliamo la funzione di verosimiglianza:

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}e^{-(x_i-\theta)}\mathbb{1}_{\{x_i\geqslant\theta\}}(x_i)=e^{-\sum(x_i-\theta)}\mathbb{1}_{\{\theta\leqslant x_{(1)}\}}(\theta)$$

La funzione $a(\theta)=-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)$ è crescente, quindi il massimo è assunto nel punto $x_{(1)}$ e quindi lo SMV è $\hat{\Theta}=\min_i X_i=X_{(1)}$.
Dobbiamo calcolare il suo valore atteso, ci serve, quindi, la sua distribuzione.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\hat{\Theta}>y)&=\mathbb{P}(X_{(1)}>y)=\mathbb{P}(X_i>y,\ \forall\, i)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i>y)=\\&=\prod_{i=1}^{n}\int_y^{+\infty}e^{-(x_i-\theta)}\,\mathrm{d}x_i=\prod_{i=1}^{n}-e^{-(x_i-\theta)}\Big|_y^{+\infty}=e^{-n(y-\theta)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad F_{\hat{\Theta}}(y)=\mathbb{P}(\hat{\Theta}\leqslant y)=1-e^{-n(y-\theta)}\quad\Rightarrow\quad f_{\hat{\Theta}}(y)=ne^{-n(y-\theta)}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\hat{\Theta})&=\int_\theta^{+\infty}xne^{-n(x-\theta)}\,\mathrm{d}x=-xe^{-n(x-\theta)}\Big|_\theta^{+\infty}+\int_\theta^{+\infty}e^{-n(x-\theta)}\,\mathrm{d}x=\\&=\theta-\frac{e^{-n(x-\theta)}}{n}\Big|_\theta^{+\infty}=\theta+\frac{1}{n}\end{aligned}$$

Quindi lo stimatore $\hat{\Theta}$ non è corretto ma è asintoticamente corretto.

Soluzione dell'esercizio 4.

a) Calcoliamo il valore atteso di $\hat{\theta}_3$:

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}_3)=a\mathbb{E}(\hat{\theta}_1)+(1-a)\mathbb{E}(\hat{\theta}_2)=a\theta+(1-a)\theta=\theta.$$

Questo mostra che lo stimatore $\hat{\theta}_3$ è non distorto.

b) Calcoliamo, ora, la varianza dello stimatore e la minimizziamo rispetto ad a:

$$\begin{aligned}Var(\hat{\theta}_3)&=Var\big(a\hat{\theta}_1+(1-a)\hat{\theta}_2\big)=Var(a\hat{\theta}_1)+Var\big((1-a)\hat{\theta}_2\big)=\\&=a^2Var(\hat{\theta}_1)+(1-a)^2Var(\hat{\theta}_2)=a^2\sigma_1^2+(1-a)^2\sigma_2^2.\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial a}Var(\hat{\theta}_3)=2a\sigma_1^2-2(1-a)\sigma_2^2=0\quad\Leftrightarrow\quad a=\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

Quindi il valore di a che minimizza la varianza dello stimatore è $a=\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$.

Soluzione dell'esercizio 5. Si deve calcolare la varianza tenendo conto del fatto che $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ non sono indipendenti e si ha:

$$Var(\hat{\theta}_3) = a^2\sigma_1^2 + (1-a)\sigma_2^2 + 2ac - 2a^2c.$$

$$\frac{\partial}{\partial a}Var(\hat{\theta}_3) = 2a\sigma_1^2 - 2(1-a)\sigma_2^2 + 2c - 4ac = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{\sigma_2^2 - c}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2c}$$

Notate che se $c = 0$ si ha lo stesso valore dell'esercizio 4.

Soluzione dell'esercizio 6. Dobbiamo mostrare che $\overline{Y}$ converge in probabilità a $\frac{\theta}{\theta+1}$. Vediamo se le Y_i verificano le ipotesi della legge dei grandi numeri, calcoliamo, quindi, momento primo e momento quarto.

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^1 y\theta y^{\theta-1}\,\mathrm{d}y = \left.\frac{\theta y^{\theta+1}}{\theta+1}\right|_0^1 = \frac{\theta}{\theta+1} < +\infty$$

$$\mathbb{E}(Y^4) = \int_0^1 y^4\theta y^{\theta-1}\,\mathrm{d}y = \left.\frac{\theta y^{\theta+4}}{\theta+4}\right|_0^1 = \frac{\theta}{\theta+4} < +\infty$$

Possiamo applicare la legge dei grandi numeri a $\overline{Y}$ e concludere che $\overline{Y}$ converge con probabilità 1 a $\mathbb{E}(Y) = \frac{\theta}{\theta+1}$, ovvero $\overline{Y}$ è uno stimatore consistente di $\frac{\theta}{\theta+1}$.

Soluzione dell'esercizio 7.

a) Il valore atteso di Y_1 è μ poiché è una realizzazione da una $N(\mu,1)$, quindi è uno stimatore corretto.

b) Poiché $Y_1 \sim N(\mu,1)$, $Z = Y_1 - \mu \sim N(0,1)$ e quindi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|Y_1-\mu| \leqslant 1) &= \mathbb{P}(|Z| \leqslant 1) = \mathbb{P}(-1 \leqslant Z \leqslant 1) = 1 - 2\cdot\mathbb{P}(Z \leqslant -1) = \\ &= 1 - 2\cdot 0,1587 = 0,6826.\end{aligned}$$

c) La definizione di consistenza (convergenza in probabilità) è: $\hat{\theta}_n$ è uno stimatore consistente per θ se $\forall\,\epsilon > 0 \quad \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| \leqslant \epsilon) = 1$. Nel nostro caso $\hat{\theta}_n = Y_1$ e abbiamo che per $\epsilon = 1 \quad \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(|Y_1-\mu| \leqslant 1) = 0,6826 \neq 1$, quindi Y_1 non è uno stimatore consistente per μ.

Soluzione dell'esercizio 8.

a) Troviamo la funzione di verosimiglianza e vediamo come è possibile fattorizzarla:

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n}e^{-\frac{\sum y_i^2 + n\mu^2 - 2\mu\sum y_i}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n}e^{-\frac{\sum y_i^2}{2\sigma^2}}e^{-\frac{n\mu(\mu-2\overline{Y})}{2\sigma^2}}$$

b)

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n}e^{-\frac{\sum(y_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

c)

$$L(\mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n}e^{-\frac{\sum y_i^2}{2\sigma^2} - \frac{\mu(n\mu - 2\sum y_i)}{2\sigma^2}}$$

Soluzione dell'esercizio 9. Calcoliamo la funzione di verosimiglianza:

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} p^{y_i}(1-p)^{1-y_i} = p^{\sum y_i}(1-p)^{n-\sum y_i},$$

quindi, per il criterio di fattorizzazione, $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ è una statistica sufficiente; vediamo se è anche completa. Sia $T = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, abbiamo che $\sum_{i=1}^{n} Y_i \sim Binom(n,p)$:

$$\mathbb{E}(z(T)) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} z(k)\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = (1-p)^n \sum_{k=0}^{n} z(k)\binom{n}{k}\left(\frac{p}{1-p}\right)^k =$$
$$= (1-p)^n \sum_{k=0}^{n} z(k)\binom{n}{k} w^k \equiv 0 \quad \forall\, w \quad \text{avendo definito } w = \frac{p}{1-p}$$

quindi deve essere

$$\sum_{k=0}^{n} z(k)\binom{n}{k} w^k \equiv 0 \quad \forall\, w \quad \text{ma questo è un polinomio in } w$$

e quindi

$$z(k)\binom{n}{k} \equiv 0 \quad \forall\, k \quad \Rightarrow \quad z(k) = 0 \quad \forall\, k.$$

Quindi T è una statistica sufficiente completa. Definiamo $\hat{\Theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$, si ha

$$\mathbb{E}(\hat{\Theta}) = \frac{np}{n} = p,$$

quindi $\hat{\Theta}$ è uno stimatore corretto funzione di una statistica sufficiente completa e quindi è un UMVUE.

Soluzione dell'esercizio 10. Scriviamo la funzione di verosimiglianza:

$$L(\theta) = \frac{2^n}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum y_i^2} \prod_{i=1}^{n} y_i,$$

quindi la distribuzione appartiene alla famiglia esponenziale e quindi $\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$ è una statistica sufficiente minimale completa. Calcoliamo la distribuzione di $W = Y^2$:

$$f_W(w) = f_Y(\sqrt{w})\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\sqrt{w}\right| = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{w}{\theta}} \sim Esp\left(\frac{1}{\theta}\right)$$

Quindi $\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(W) = \theta \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2\right) = n\theta$. Allora $\hat{\Theta} = \overline{Y}$ è uno stimatore non distorto funzione di una statistica sufficiente completa e quindi è un UMVUE.

Soluzione dell'esercizio 11. La funzione di verosimiglianza è:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{3y_i^2}{\theta^3} \mathbb{1}_{\{[0,\theta]\}}(y_i) = \frac{3^n}{\theta^{3n}} \prod_{i=1}^{n} y_i^2 \mathbb{1}_{\{\theta \geqslant y_i\}}(\theta) =$$
$$= \frac{3^n}{\theta^{3n}} \left(\prod_{i=1}^{n} y_i^2 \right) \mathbb{1}_{\{\theta \geqslant y_{(n)}\}}(\theta)$$

Lo stimatore di massima verosimiglianza è dunque $\hat{\Theta} = Y_{(n)}$ poiché la funzione di verosimiglianza è decrescente e assume il massimo sul primo valore che può essere assunto. Dal criterio di fattorizzazione risulta che $Y_{(n)}$ è una statistica sufficiente. Calcoliamo la sua distribuzione.

$$\mathbb{P}(Y_{(n)} \leqslant y) = \mathbb{P}(Y_1 \leqslant y, \ldots, Y_n \leqslant y) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y_i \leqslant y) = \prod_{i=1}^{n} \int_0^y \frac{3y_i^2}{\theta^3} \, \mathrm{d}y_i =$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{3}{\theta^3} \frac{y_i^3}{3} \bigg|_0^y = \prod_{i=1}^{n} \frac{y^3}{\theta^3} = \frac{y^{3n}}{\theta^{3n}}$$
$$f_{Y_{(n)}}(y) = \frac{3n}{\theta^{3n}} y^{3n-1}, \quad 0 \leqslant y \leqslant \theta.$$

Mostriamo che $T = Y_{(n)}$ è una statistica completa.

$$\mathbb{E}(z(T)) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^\theta z(y) \frac{3n}{\theta^{3n}} y^{3n-1} \, \mathrm{d}y \equiv 0 \quad \forall \theta$$
$$\Rightarrow \quad z(y) 3n y^{3n-1} = 0 \quad \forall y \quad \Rightarrow \quad z(y) = 0 \quad \forall y$$

Questo dimostra che T è una statistica completa. Vediamo ora se $\hat{\Theta}$ è uno stimatore corretto.

$$\mathbb{E}(Y_{(n)}) = \int_0^\theta y \frac{3n}{\theta^{3n}} y^{3n-1} \, \mathrm{d}y = \frac{3n}{3n+1} \theta$$

$\hat{\Theta}$ non è uno stimatore corretto ma $\hat{\Theta}_1 = \dfrac{3n+1}{3n} Y_{(n)}$ lo è ed essendo funzione di una statistica sufficiente completa è un UMVUE.

Soluzione dell'esercizio 12. Sappiamo che $\mathbb{E}(Y_i) = \frac{\alpha}{\beta}$ e che $Var(Y_i) = \frac{\alpha}{\beta^2}$ e quindi $\mathbb{E}(Y_i^2) = Var(Y_i) + \big(\mathbb{E}(Y_i)\big)^2 = \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha+\alpha^2}{\beta^2}$. Le equazioni da impostare sono quindi

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{\beta} = \overline{Y} \\ \dfrac{\alpha + \alpha^2}{\beta^2} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \end{cases}$$

Risolvendo si trova che $\hat{\alpha} = \dfrac{n\overline{Y}^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2}$ e $\hat{\beta} = \dfrac{n\overline{Y}}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2}$.

Soluzione dell'esercizio 13. Calcoliamo il momento primo della distribuzione:

$$\mathbb{E}(Y_i) = \int_0^1 y_i (\theta+1) y_i^\theta \, \mathrm{d}y_i = \frac{\theta+1}{\theta+2}$$

Imponiamo che $\dfrac{\theta+1}{\theta+2} = \overline{Y}$, si ha che $\hat{\Theta} = \dfrac{2\overline{Y} - 1}{1 - \overline{Y}}$.