Tema 5

Successioni e funzioni numeriche

5.1 Quesiti di livello base

5.1.1 Dati due numeri positivi a e b, è più grande la loro media aritmetica $\frac{a+b}{2}$ o la loro media geometrica $\sqrt{ab}$?

5.1.2 Una progressione $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ si dice *aritmetica* quando la differenza tra due termini consecutivi a_{n+1}, a_n è indipendente da n.

Dimostrare che il termine generale a_n di una progressione aritmetica si presenta sempre nella forma $a_n = b(n-1)+c$ (per opportuni valori delle costanti b e c).

5.1.3 Una progressione $a_1, a_2, a_3, \ldots$ (con $a_n \neq 0$ per ogni n) si dice *geometrica* quando il rapporto tra due termini consecutivi è costante.

Dimostrare che il termine generale a_n di una progressione geometrica si presenta sempre nella forma $a_n = c \cdot b^{n-1}$ (per opportuni valori delle costanti b e c).

5.1.4 Sono dati un angolo α di π^2 radianti e un angolo β di 539 gradi. Verificare che sono entrambi maggiori di un angolo giro e minori di due angoli giro. Dire quali dei due è il maggiore. Dire inoltre se è più grande il seno di α o il seno di β.

5.1.5 Il numero $1+\sqrt{2}$ è razionale? Sommando, moltiplicando e dividendo numeri della forma $x+y\sqrt{2}$ (con x e y razionali), si ottengono sempre numeri dello stesso tipo?

5.1.6 Durante un breve viaggio in treno, si fanno le seguenti osservazioni.

Al segnale di partenza, il treno comincia a muoversi ed aumenta di velocità per circa tre minuti. Poi prosegue a velocità approssimativamente costante per circa cinque minuti. A questo punto inizia a rallentare e dopo due minuti giunge ad una stazione, dove rimane in sosta per un minuto.

Quindi il treno riparte, ed impiega questa volta quattro minuti per raggiungere una velocità costante, che risulta ora un po' più elevata che in precedenza. Viaggia così per sette minuti e infine compie una frenata, che richiede questa volta tre minuti, per arrestarsi nella stazione di destinazione.

Si chiede di rappresentare queste osservazioni per mezzo di un grafico, riportando in ascissa il tempo e in ordinata la velocità. Si tenga presente che la rappresentazione grafica di un evento non può in nessun caso essere effettuata con esattezza assoluta: essa sarà necessariamente approssimativa e sarà tanto più precisa quanto maggiore è la quantità e l'accuratezza dei dati a disposizione. Quello che viene richiesto in questo esercizio è semplicemente il disegno di un grafico che risulti coerente con le informazioni fornite.

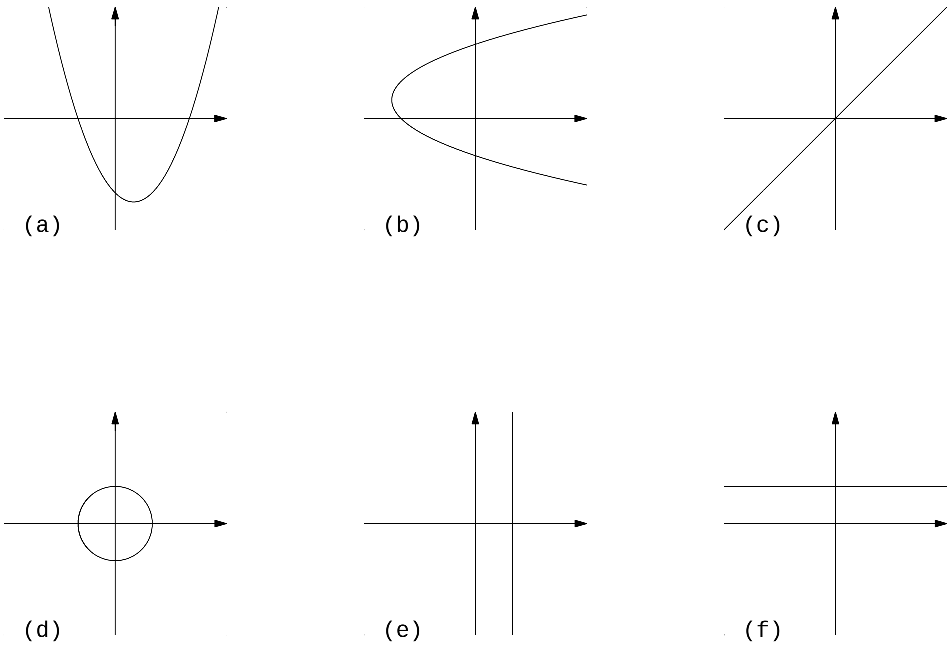

Figura 9.

5.1.7 Nella Figura 9 sono rappresentate delle relazioni tra numeri reali. Quali di queste possono essere interpretate come grafici di funzioni $y = f(x)$?

5.2 Quesiti che richiedono maggiore attenzione

5.2.1 Si consideri la successione $a_n = 3n - 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Verificare che si tratta di una progressione aritmetica e calcolare la somma dei primi 10 termini.

5.2.2 Si consideri la successione $a_n = 2 \cdot 5^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Verificare che si tratta di una progressione geometrica. Quindi calcolare il prodotto dei primi suoi 4 termini e la somma dei primi 5.

5.2.3 Un ciclista inizia un periodo di allenamento percorrendo 10 km il primo giorno, 15 km il secondo giorno, 20 km il terzo giorno e così via aumentando di 5 km ogni giorno.

Quanti chilometri ha percorso complessivamente dopo 30 giorni di allenamento?

5.2.4 Secondo un antico aneddoto orientale, un uomo che aveva reso un importante servigio all'imperatore della Cina chiese, come ricompensa, tanti chicchi di grano quanti se ne potevano mettere su una scacchiera nella maniera seguente: un chicco sulla prima casella, due chicchi sulla seconda, quattro chicchi sulla terza, otto chicchi sulla quarta, e così via raddoppiando ogni volta.

Sapendo che una scacchiera è composta da 64 caselle, quanti chicchi di grano dovette dare l'imperatore a quell'uomo?

5.2.5 Quante cifre sono necessarie per scrivere il numero 2^{64} nell'usuale base 10? (Per rispondere, può essere utile sapere che $\log_{10} 2 = 00{,}30103\ldots$)

5.2.6 Dire se è più grande il seno di un angolo di un radiante oppure il seno di un angolo di due radianti.

5.2.7 Dimostrare che

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \leq \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta$$

qualunque siano $\alpha, \beta \in [0, \pi/2]$. Mostrare anche che in qualche caso vale l'uguaglianza.

5.2.8 Descrivere per scritto le caratteristiche delle funzioni corrispondenti ai grafici mostrati nella Figura 10.

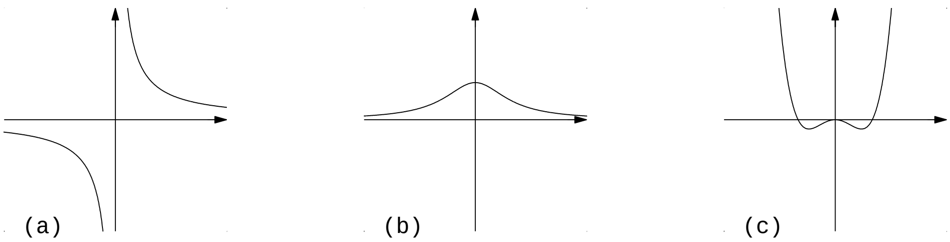

Figura 10.

Discutere in particolare la monotonia (crescenza, decrescenza) e l'esistenza di punti di massimo o di minimo relativi e assoluti.

Questi grafici corrispondono alle tre espressioni numeriche

$$y = x^4 - x^2\,, \qquad y = \frac{1}{1+x^2}\,, \qquad y = \frac{1}{x}$$

Associare ad ogni grafico l'espressione più appropriata.

5.2.9 Nella Figura 11 sono disegnati i grafici di tre funzioni biettive e delle loro inverse. Sono inoltre disegnati i grafici di due funzioni non invertibili e il grafico di una funzione che coincide con la sua inversa. Individuare le due funzioni non invertibili, quella che coincide con la sua inversa e le coppie di funzioni l'una inversa dell'altra.

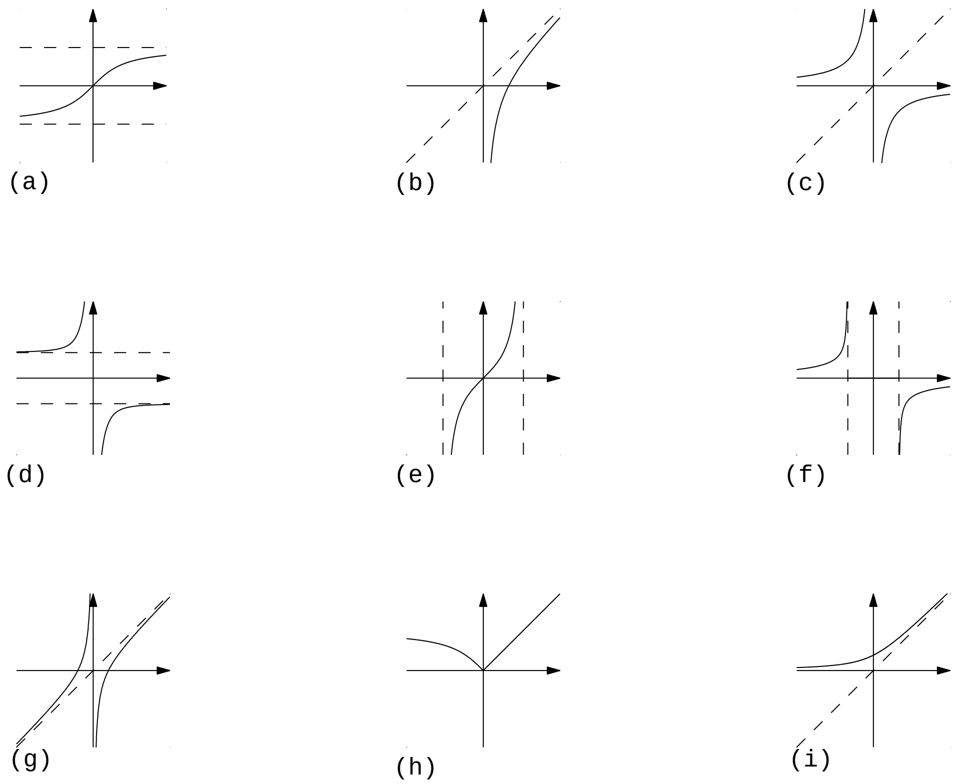

Figura 11.

5.2.10 Nella Figura 12 è riportato il grafico di una funzione $y = f(x)$.

La Figura 13 rappresenta invece i grafici delle funzioni $f(|x|), |f(x)|, |f(|x|)|, f(-x), f(x+1), f(x-1), f(2x), f(x/2), -f(x)$.

Dire quale grafico corrisponde a quale funzione.

5.3 Risposte commentate

5.1.1 È più grande la media aritmetica. Per vederlo, osserviamo che la disuguaglianza

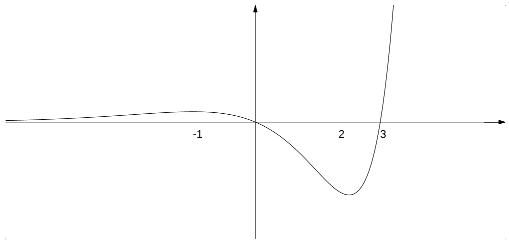

Figura 12.

a) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ è equivalente alla

b) $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, la quale è equivalente alla

c) $(a+b)^2 \geq 4ab$, la quale è equivalente alla

d) $a^2+2ab+b^2 \geq 4ab$, la quale è equivalente alla

e) $a^2-2ab+b^2 \geq 0$, la quale è infine equivalente alla

f) $(a-b)^2 \geq 0$

che è ovviamente sempre vera. Questi passaggi mostrano che la media aritmetica e la media geometrica sono uguali solo se i due numeri coincidono. Osserviamo anche che il passaggio da b) a c) è corretto in quanto entrambi i membri sono positivi.

5.1.2 Indichiamo con b la differenza costante di due termini consecutivi a_{n+1} e a_n della successione. Si ha allora

$$(*) \qquad a_{n+1} = a_n + b$$

per ogni $n = 1,2,3,\ldots$. Quest'ultima può essere interpretata come una formula ricorrente che fornisce i termini della successione, una volta che sia noto il valore di a_1. Posto allora $a_1 = c$ e applicando successivamente la $(*)$, si ottiene facilmente $a_n = c+(n-1)b$.

Dato un intero positivo N, la somma dei primi N termini di una progressione aritmetica si può calcolare mediante la formula

$$a_1+\ldots+a_N = \frac{N[b(N-1)+2c]}{2} .$$

I calcoli eseguiti nella risoluzione del Quesito 1.2.1 sono particolari applicazioni di questa formula.

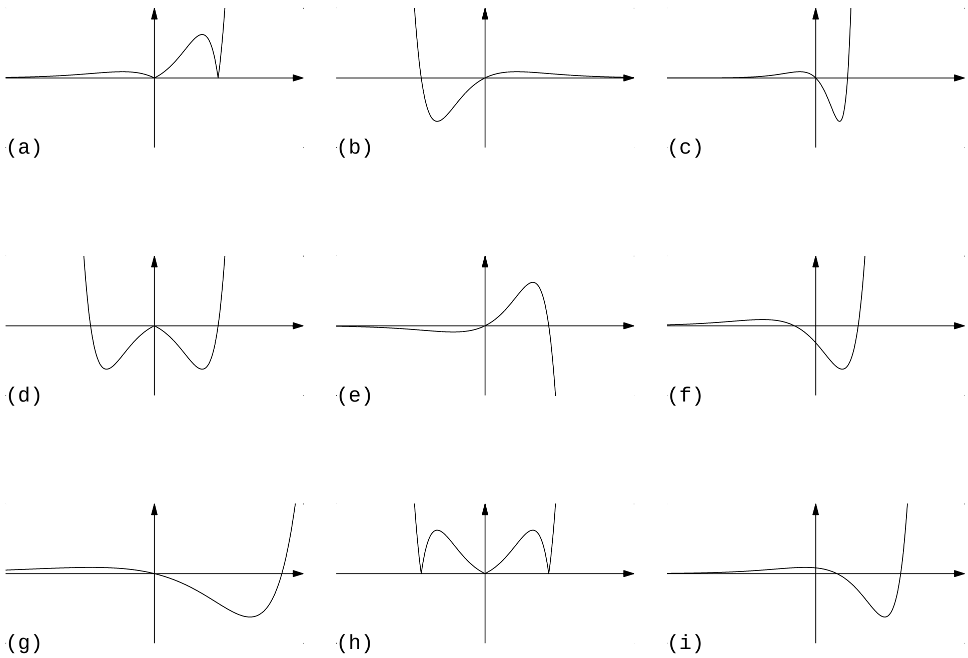

Figura 13.

5.1.3 Lo svolgimento è analogo a quello del Quesito 5.1.2. Posto $b = a_{n+1}/a_n$, si vede che i termini della successione sono generati dalla formula ricorsiva $a_{n+1} = b \cdot a_n$, una volta che sia noto il valore di $a_1 = c$. Di qui si ricava la formula esplicita $a_{n+1} = c \cdot b^n$.

Fissato un intero positivo N, il prodotto dei primi N termini di una progressione geometrica si può calcolare mediante la formula

$$a_1 \cdot \ldots \cdot a_N = c^N \cdot b^{\frac{N(N-1)}{2}} \ .$$

Per la somma dei primi N termini di una progressione geometrica si ha invece la formula

$$a_1 + \ldots + a_N = c \cdot \frac{b^N - 1}{b - 1} \ .$$

5.1.4 Per confrontare tra loro angoli dati conviene in generale ricondurli alla stessa unità di misura applicando la nota formula

$$\text{misura in radianti } = \frac{\pi}{180}\text{misura in gradi} .$$

Tuttavia in questo caso è sufficiente osservare che, essendo $3 < \pi < 4$, si ha

$$3\pi < \pi^2 < 4\pi \qquad \text{e che} \qquad 539 = 540 - 1 = 180 \cdot 3 - 1 .$$

Un angolo di π^2 radianti è quindi un po' più grande di tre angoli piatti, mentre un angolo di 539 gradi è un po' più piccolo.

Per quanto riguarda il valore del seno, conviene ragionare in modo geometrico. Facendo coincidere un lato di ciascun angolo con l'asse positivo delle x, l'altro lato viene a cadere nel secondo quadrante nel caso dell'angolo β e nel terzo quadrante nel caso dell'angolo α. Il seno di β risulta dunque positivo, mentre il seno di α risulta negativo. In questo caso, è cioè l'angolo minore ad avere il seno maggiore.

5.1.5 Se $1+\sqrt{2}$ fosse uguale ad un numero razionale m/n, si dovrebbe avere anche

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} - 1 .$$

Di conseguenza, $\sqrt{2}$ sarebbe razionale ed è ben noto che questo è falso. Per il resto osserviamo che

$$(x+y\sqrt{2}) + (u+v\sqrt{2}) = (x+u) + (y+v)\sqrt{2}$$

e

$$(x+y\sqrt{2}) \cdot (u+v\sqrt{2}) = xu + xv\sqrt{2} + yu\sqrt{2} + 2vy = (xu+2vy) + (xv+yu)\sqrt{2} .$$

Infine, posto che u e v non siano entrambi nulli,

$$\frac{(x+y\sqrt{2})}{(u+v\sqrt{2})} = \frac{(x+y\sqrt{2}) \cdot (u-v\sqrt{2})}{(u+v\sqrt{2}) \cdot (u-v\sqrt{2})} = \frac{(xu-2vy)}{u^2-2v^2} + \frac{(-xv+yu)}{u^2-2v^2}\sqrt{2} .$$

Questi passaggi mostrano che se x e y sono razionali, sommando, moltiplicando o dividendo numeri della forma $x+y\sqrt{2}$ si ottengono effettivamente numeri della stessa forma. Nel caso della divisione, osserviamo che è lecito moltiplicare numeratore e denominatore per $u - v\sqrt{2}$. Infatti, $u - v\sqrt{2} = 0$ se e solo se $u = v = 0$, il che è stato escluso, oppure $\frac{u}{v} = \sqrt{2}$ il che è impossibile in quanto u e v sono, per ipotesi, razionali.

5.1.6 Sulla base delle informazioni fornite dal testo, il grafico della Figura 14 potrebbe essere già abbastanza rappresentativo.

Tuttavia, una rappresentazione un po' più fedele alla realtà potrebbe essere fornita dal grafico della Figura 15.

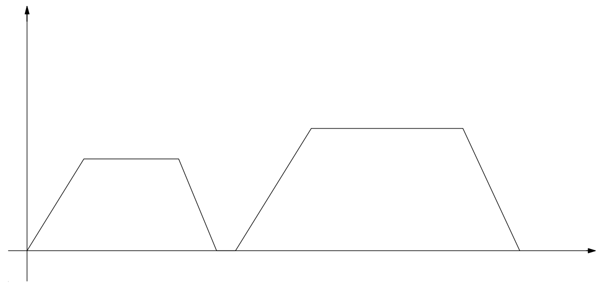

Figura 14.

5.1.7 Nel disegno, abbiamo riportato, come d'uso, la variabile indipendente x in ascissa e la variabile dipendente y in ordinata. Una relazione può allora essere interpretata come grafico di una funzione quando le rette verticali incontrano il grafico in non più di un punto. Dunque (a), (c), (f) rappresentano funzioni, le altre no. Si potrebbe aggiungere che (b) ed (e) rappresentano funzioni se si fosse riportata la variabile indipendente x sull'asse delle ordinate, e la variabile dipendente y sull'asse delle ascisse; (d) invece non rappresenta il grafico di una funzione in nessun caso.

* * *

5.2.1 Consideriamo due termini generici consecutivi a_{n+1} e a_n e verifichiamo che la loro differenza è costante. Si ottiene in particolare, in questo modo, il valore di $b = 3(n+1) - 1 - (3n-1) = 3$. Inoltre, per $n = 1$, si ottiene $c = a_1 = 2$. Applicando la formula ricordata

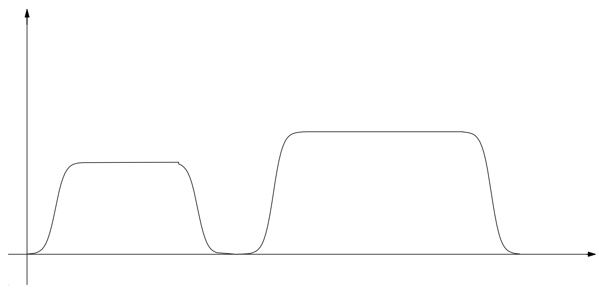

Figura 15.

nella risposta al Quesito 5.1.2, il valore della somma dei primi dieci termini risulta uguale a $\frac{10}{2}[3\cdot 9+2\cdot 2]=31\cdot 5=155$.

5.2.2 In questo caso si ha $a_{n+1}/a_n=5$ e $a_1=10$. Applicando le formule ricordate nella risposta al Quesito 5.1.3, si ha poi rispettivamente 156250000 per il prodotto e 7810 per la somma.

5.2.3 È un'applicazione di una formula già menzionata in precedenza. L'unica difficoltà consiste nel riconoscere che i chilometri percorsi ogni giorno crescono in progressione aritmetica, e nell'impostare correttamente i dati. Con le solite notazioni, abbiamo $b=5$, $c=10$ e $N=30$. Dunque il totale dei chilometri è $\frac{30}{2}[5\cdot 29+2\cdot 10]=2475$.

5.2.4 Anche in questo caso, si tratta di applicare una formula già vista. Il totale è dato da $2^{64}-1$.

5.2.5 Conoscere il numero di cifre che compongono un numero equivale a "collocare" il numero stesso tra due successive potenze di 10, e serve ad avere un'idea del suo ordine di grandezza. Per quanto riguarda il numero 2^{64} (che compariva nel quesito 5.2.4) possiamo osservare che

$$2^{64}=(10^N)^{64}=10^{64N}$$

dove si è posto $N=\log_{10}2$. Poiché, come suggerito, $N=0{,}30103...$, il nostro numero è all'incirca uguale a $10^{19{,}26592}$ ed è quindi compreso tra 10^{19} e 10^{20}.

5.2.6 Cerchiamo per prima cosa di arrivare alla risposta con un ragionamento intuitivo. Ricordando che $\pi=3{,}1415...>3$, si osserva che l'angolo di un radiante è minore dell'angolo di $\pi/3$ radianti e che l'angolo di due radianti è maggiore dell'angolo di $\pi/3$ radianti e minore dell'angolo di $2\pi/3$ radianti. Interpretando il seno come la proiezione sull'asse y dell'intersezione tra la circonferenza unitaria e il lato di ciascun angolo, risulta allora chiaro che $\operatorname{sen}2>\operatorname{sen}1$.

Procedendo in maniera più rigorosa, si può applicare la formula di duplicazione $\operatorname{sen}2=2\operatorname{sen}1\cdot\cos 1$. Come già osservato, l'angolo di un radiante è strettamente minore dell'angolo di $\pi/3$ radianti, per cui $\cos 1>\frac{1}{2}$. Si ha allora

$$\operatorname{sen}2>2\cdot\frac{1}{2}\operatorname{sen}1=\operatorname{sen}1\ .$$

5.2.7 L'esercizio fa riferimento alla formula di addizione del seno

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\ .$$

Poiché gli angoli devono essere compresi tra zero e $\pi/2$, sia il seno che il coseno sono non negativi. Inoltre, seno e coseno sono sempre non superiori a 1. Dunque, $\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\leq\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha\sin\beta\leq\operatorname{sen}\beta$. In conclusione, si ha $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\leq\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta$.

L'uguaglianza certamente non vale se α e β sono entrambi diversi da zero. In tal caso infatti $\operatorname{sen}\alpha$ e $\operatorname{sen}\beta$ sono anch'essi diversi da zero, mentre $\cos\alpha$ e $\cos\beta$ sono strettamente minori di 1. Per avere un esempio in cui $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ bisogna allora prendere almeno uno dei due angoli α e β uguale a zero.

5.2.8 Il primo grafico a sinistra corrisponde ad una funzione con un asintoto verticale nell'origine. La funzione è decrescente sia nell'intervallo $(-\infty, 0)$ che nell'intervallo $(0, +\infty)$. Tuttavia sarebbe errato dire che la funzione è decrescente su tutto il suo dominio. Infatti, si ha, per esempio, $f(-1) < f(1)$ nonostante che $-1 < 1$. La funzione non presenta né massimi né minimi, né relativi né assoluti. Questo grafico corrisponde verosimilmente a quello della funzione numerica $y = 1/x$.

La seconda funzione presenta un asintoto orizzontale. La funzione cresce per $x < 0$ e decresce per $x > 0$. Si ha un massimo (assoluto) per $x = 0$. La funzione non ha invece minimi, nonostante che la sua immagine risulti limitata. Tra quelle date, la funzione che meglio si adatta a questo grafico è $y = 1/(1+x^2)$.

La terza funzione presenta un massimo (relativo) e due punti di minimo (entrambi assoluti). Essa ha un andamento qualitativo simile a quello della funzione numerica $y = x^4 - x^2$.

5.2.9 Una funzione è biettiva se e soltanto se per ogni valore della variabile dipendente y appartenente all'insieme immagine della funzione, esiste un unico valore della variabile indipendente x (appartenente al dominio di f), tale che $y = f(x)$.

Supponiamo di aver disegnato il grafico di una funzione biettiva $y = f(x)$ in un riferimento cartesiano, in cui la variabile indipendente x sia riportata, come d'uso, in ascissa e la variabile dipendente y in ordinata. Possiamo disegnare il grafico di una nuova funzione $y = g(x)$ sullo stesso riferimento cartesiano nel modo seguente. Si prende un numero a appartenente all'immagine di f e si risale a quell'unico valore b per cui $f(b) = a$. Quindi si pone $b = g(a)$. La funzione $y = g(x)$ si dice l'inversa di f. Per costruzione, il dominio di g coincide con l'immagine di f. Sottolineiamo che questa costruzione ha senso solo se f è biettiva. Per questa ragione, una funzione biettiva si dice anche invertibile. Osserviamo anche che se f è invertibile e g è la sua inversa, allora anche g è invertibile e l'inversa di g è f.

Sia $y = f(x)$ una funzione invertibile, e sia $y = g(x)$ la sua funzione inversa. In base alla definizione, se a appartiene al dominio di f si deve avere $a = f(g(a))$. In altre parole, se (a, b) è un punto appartenente al grafico di g, allora (b, a) deve appartenere al grafico di f, e viceversa. Da un punto di vista geometrico, due punti del piano cartesiano hanno le coordinate "scambiate" quando sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

In base a quese considerazioni, è allora facile vedere che le funzioni non invertibili sono la (g) e la (h). La funzione che coincide con la propria inversa è la (c) (il suo grafico è infatti simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante). Le coppie di funzioni l'una inversa dell'altra sono (a) ed (e), (b) e (i), (d) ed (f).

5.2.10 Nell’ordine, i grafici richiesti sono: (d), (a), (h), (b), (f), (i), (c), (g), (e).

CAPITOLO III

Test di autovalutazione

Il test che si trova nelle prossime pagine è composto da 30 domande a fronte di ciascuna delle quali sono proposte cinque risposte, di cui solo una è corretta. Si dovrà rispondere al test ponendo una croce sulla risposta ritenuta corretta.
Il tempo massimo a disposizione per leggere e rispondere a tutte le domande è di due ore. C'è tutto il tempo per rispondere con calma. E' permesso l'uso di libri o di appunti. Non è permesso l'uso di strumenti di calcolo.
Solo dopo aver risposto a tutte le domande, si possono confrontare le proprie risposte con quelle scritte nella tabella posta nella pagina successiva al test.
Se la risposta ad una domanda è sbagliata, si consiglia di ripetere il ragionamento, cercando di individuare da soli l'errore commesso, prima di leggere la spiegazione fornita.
Non tutte le domande sono di pari difficoltà e, per tale motivo, per ciascuna di esse viene fornita una valutazione del grado di difficoltà.