Tema 4

Geometria

4.1 Quesiti di livello base

4.1.1 Assegnati tre segmenti le cui lunghezze misurano rispettivamente a, b, c, esiste sempre un triangolo che li ammette come lati? Se il triangolo esiste, spiegare come si costruisce con riga e compasso.

4.1.2 Spiegare come si costruisce con riga e compasso la circonferenza inscritta e la circonferenza circoscritta ad un triangolo dato. Realizzare effettivamente tali costruzioni.

4.1.3 Dimostrare le seguenti proposizioni:

a) in ogni quadrilatero inscritto in una circonferenza la somma degli angoli opposti è un angolo piatto;

b) in ogni quadrilatero circoscritto ad una circonferenza la somma delle lunghezze di due lati opposti è uguale alla somma delle lunghezze degli altri due.

4.1.4 Dimostrare le seguenti proposizioni:

a) la somma degli angoli interni di un poligono convesso è uguale a tanti angoli piatti quanti sono i lati del poligono, meno due angoli piatti;

b) la somma degli angoli esterni di un poligono convesso è uguale a due angoli piatti.

4.1.5 Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali:

a) scrivere l'equazione della retta che passa per il punto $(2, -1)$ ed è perpendicolare alla retta $4x - 3y + 12 = 0$;

b) determinare la distanza del punto $(-3, 2)$ dalla retta $4x - 3y + 12 = 0$;

c) scrivere l'equazione della retta (è una sola?) passante per il punto $(0, 0)$ e tangente alla circonferenza $x^2 + y^2 - 2x + y = 0$.

4.1.6 Due sfere hanno rispettivamente area S_1, S_2 e volume V_1, V_2. Conoscendo il rapporto $\frac{S_1}{S_2} = h$ (numero positivo) determinare il valore del rapporto $\frac{V_1}{V_2}$.

4.1.7 Sia K un cilindro circolare retto illimitato (formato cioè dalle rette che passano per i punti di una circonferenza $\mathcal{C}$ e sono perpendicolari al piano γ della circonferenza stessa). Esaminando le intersezioni di K con un piano π, in relazione a diverse posizioni di π dire quali dei seguenti casi si possono presentare.
L'intersezione è: a) una ellisse, b) una iperbole, c) un ramo di iperbole, d)una parabola, e) una circonferenza, f) una retta, g) due rette, h) tre rette, i) un punto, l) nessun punto.

4.1.8 Sappiamo che l'intersezione di *due* piani distinti dello spazio può essere di due tipi: a) una retta comune ai due piani, b) l'insieme vuoto, quando i piani sono tra loro paralleli.
Si chiede di elencare analogamente tutti i possibili tipi di intersezione che si possono presentare con *tre* piani distinti dello spazio.

4.1.9 Date nello spazio due rette sghembe r, s quanti sono i piani che

a) contengono r e sono paralleli a s?

b) contengono r e sono perpendicolari a s?

Si osservi che la risposta alla seconda domanda esige una distinzione di casi.

4.2 Quesiti che richiedono maggiore attenzione

4.2.1 Siano dati nel piano una circonferenza $\mathcal{C}$ e un punto P non appartenente a $\mathcal{C}$. Trovare tra i punti di $\mathcal{C}$, quello piú vicino a P e quello piú lontano da P. Giustificare la risposta.

4.2.2 Si consideri la proposizione: "in un triangolo rettangolo la bisettrice dell'angolo retto e la mediana relativa al cateto maggiore sono perpendicolari". Dire se tale proposizione è vera o falsa. Se è vera dimostrarla; se è falsa riconoscere se esiste qualche caso particolare in cui essa è vera.

4.2.3 Si considerino i seguenti enunciati che si riferiscono al piano euclideo:

a) asse di un segmento AB è la retta passante per il punto medio di AB e perpendicolare alla retta contenente il segmento;

b) asse di un segmento AB è il luogo dei punti del piano equidistanti dai punti A e B.

In alcuni libri di testo l'enunciato (a) è assunto come definizione di asse e quindi l'enunciato (b) è un teorema che esprime una proprietà dell'asse stesso. In altri libri di testo, al contrario, (b) è assunto come definizione, mentre (a) esprime un teorema. Analizzare se questi fatti sono in contraddizione tra loro.

4.2.4 Date in un piano due rette perpendicolari, studiare il luogo dei punti del piano tali che la somma delle loro distanze da tali rette non superi 1.

4.2.5 Nel piano riferito a coordinate cartesiane è dato un triangolo di vertici A, B, C. Costruire un algoritmo per stabilire se un punto assegnato P si trova all'interno, sul bordo o all'esterno del triangolo.
Risolvere effettivamente il problema facendo uso dell'algoritmo costruito nel caso in cui i punti assegnati abbiano, rispettivamente, le coordinate: $A = (1,3)$, $B = (6,7)$, $C = (5,-1)$, $P = (3,3)$.

4.2.6 Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x,y) si consideri la famiglia $\mathcal{F}$ di curve (luoghi geometrici), rappresentate, al variare del parametro reale a, dalle equazioni

$$a(x^2+y^2+x+y)+(x+y)=0.$$

Riconoscere, al variare di a, la natura dei luoghi geometrici appartenenti alla famiglia $\mathcal{F}$.
Nella famiglia $\mathcal{F}$ vi sono delle circonferenze; trovare il luogo dei loro centri.
Fissato un valore reale positivo r, esistono circonferenze di $\mathcal{F}$ di raggio r? quante?
Prima di rispondere a questo quesito enunciare con precisione cosa si intende con la espressione "equazione di una curva" oppure "equazione di un luogo geometrico".

4.2.7 Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x,y) si considerino i luoghi dei punti rappresentati dalle seguenti equazioni:

a) $x^2+y^2-1=0$,

b) $x^2+y^2=0$,

c) $x^2+y^2+1=0$,

d) $x^2+y^2+2xy=0$,

e) $x^2+y^2+xy=0$,

f) $x^2-y^2=0$,

g) $x^2+y^2+2x+2y+2=0$,

h) $(x^2-1)^2+y^2=0$.

Dopo aver dato una definizione precisa di "equazione di un luogo di punti", riconoscere quale delle precedenti equazioni rappresenta:

i) nessun punto,

ii) un punto,

iii) due punti,

iv) una retta,

v) due rette,

vi) una circonferenza.

4.2.8 Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x,y), sia $\mathcal{L}$ il luogo dei punti le cui coordinate soddisfano alla equazione

$$f(x,y) = 0$$

(con $f(x,y)$ polinomio nelle variabili reali x,y).
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false, giustificando le risposte date.

a) Un punto non può essere rappresentato da una sola equazione in x e y;

b) $\mathcal{L}$ è una retta se e solo se $f(x,y)$ è di primo grado;

c) $\mathcal{L}$ è una circonferenza se e solo se per ogni x, y, si ha $f(x,y) = f(-x,-y)$ e inoltre $f(x,y)$ non contiene il termine in xy;

d) $\mathcal{L}$ è una circonferenza se e solo se, per ogni x, y si ha $f(x,y) = f(y,x)$ e $f(x,y)$ è un polinomio di secondo grado in cui manca il termine in xy.