

Tema 2

Algebra elementare, equazioni, disequazioni

2.1 Quesiti di livello base

2.1.1 Sia

$$A = \frac{p^3 - q^3}{p - q}.$$

Calcolare il valore di A , quando $p = \frac{1}{2}$, $q = 1$.

2.1.2 Semplificare (se possibile) l'espressione

$$\frac{(a+b)^2 - c^2}{c - a - b}.$$

2.1.3 Risolvere l'equazione

$$(2x + 1)(3x - 2)(x + 4) = 0.$$

2.1.4 Tradurre la seguente frase del linguaggio corrente in una formula matematica: "Deducendo il 19% dall'importo lordo L , si ottiene l'importo netto N ".

2.1.5 Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 0,3x + 0,12y = 0 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

2.1.6 Determinare l'insieme dei valori di x per i quali risulta

$$\frac{x + \sqrt{2}}{x + \sqrt{3}} \geq 0.$$

2.1.7 A partire dalla relazione

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

(con p, q, r non nulli) esprimere p in funzione di q e di r .

2.1.8 Nel polinomio $x^2 + y^2$ eseguire le sostituzioni:

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad y = \frac{2t}{1+t^2}$$

e poi semplificare.

2.1.9 Semplificare: $(y^2 - x^2)(y^2 + x^2 - 1) - y^4 + x^4$.

2.1.10 Si sa che la somma di due numeri è 6 e che il loro prodotto è 8. Trovare i due numeri.

2.1.11 Si sa che la differenza di due numeri è 3 e che il loro prodotto è -2 . Trovare i due numeri.

2.1.12 Tradurre la seguente frase del linguaggio corrente in una formula matematica: “Se la somma dei reciproci di due numeri positivi è 1, la somma dei due numeri è uguale al loro prodotto”.

Stabilire quindi se l’enunciato è vero.

2.2 Quesiti che richiedono maggiore attenzione

2.2.1 Stabilire quali delle seguenti uguaglianze sono vere qualunque siano i numeri a, b, c, d (purché le espressioni abbiano senso) e giustificare le risposte:

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d} \quad \frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d} \quad \frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a:b}{c:d}$$

$$(a+b) : c = a : c + b : c \quad a : (b+c) = a : b + a : c.$$

2.2.2 Scrivere un’equazione di terzo grado che abbia per soluzioni i numeri $-1, 4, \frac{11}{3}$.

2.2.3 Determinare i valori di x per i quali risulta

$$x^3 + 2 > 0.$$

2.2.4 Dati due numeri distinti a, b , determinare due numeri c, d in modo che sussista l’identità:

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{c}{x+a} + \frac{d}{x+b}.$$

2.2.5 Trasformare (se possibile) la seguente espressione in un prodotto di due fattori di secondo grado (nel complesso delle variabili x, y, u, v):

$$(xu - yv)^2 + (xv + yu)^2.$$

2.2.6 Trasformare (se possibile) le seguenti espressioni in somme di quadrati:

$$3x^2 - 2xy + 2y^2 \qquad 3x^2 - 6xy + 2y^2.$$

2.2.7 Eseguire la divisione del polinomio x^4 per il polinomio $x^2 + 1$ ed esprimere con un'uguaglianza il significato dell'operazione eseguita.

2.2.8 Dati due numeri reali a, b e sapendo che $0 < a \leq b$, in che relazione stanno tra loro i numeri $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$?

2.2.9 Il lato più lungo di un foglio rettangolare misura k cm. Quale deve essere la misura del lato più corto per fare sì che, dividendo il foglio in due parti uguali (con un taglio parallelo al lato più corto) ciascuna di queste sia simile al foglio iniziale?

2.2.10 Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni:

$$\sqrt{x^2} = x \quad , \quad \sqrt{x^2 + 3} = 2x .$$

2.2.11 Determinare le soluzioni delle seguenti disequazioni:

$$\frac{1}{x} + x > 2 \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{x+5}} + 2 \geq 0 .$$

2.2.12 Dati due numeri a e b distinti, sia c la loro media aritmetica. Vale allora, ovviamente, l'uguaglianza:

(1) $a + b = 2c$.

Da questa qualcuno ha dedotto successivamente le seguenti:

(2) $(a + b)(a - b) = 2c(a - b)$

(3) $a^2 - b^2 = 2ac - 2bc$

(4) $a^2 - 2ac = b^2 - 2bc$

(5) $a^2 - 2ac + c^2 = b^2 - 2bc + c^2$

(6) $(a - c)^2 = (b - c)^2$

(7) $a - c = b - c$

(8) $a = b$.

La (8) contraddice l'ipotesi da cui siamo partiti, dunque almeno uno dei passaggi fatti è sbagliato. Quale o quali?