UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2009

GARA di SECONDO LIVELLO

MIUR

12 febbraio 2009

1) Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. NON È AMMESSO L'UTILIZZO DI CALCOLATRICI TASCABILI, LIBRI DI TESTO E TAVOLE NUMERICHE. È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno; IN PARTICOLARE, È VIETATO L'USO DI TELEFONI CELLULARI.
2) La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi.
3) Nei problemi dal numero 1 al numero 12 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
4) I problemi 13 e 14 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
5) I problemi 15, 16 e 17 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tali problemi verranno valutati con un punteggio **da 0 a 10**.
6) Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!

Da riempirsi da parte dello studente

Nome: ______________________ Cognome: ______________________

Indirizzo: ______________________ Città: ______________________

Scuola: ______________________ Anno di corso: ________ Città: ______________________

e–mail: ______________________

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

PUNTEGGIO (da riempirsi a cura dell'insegnante)

numero delle risposte esatte (1–14)		$\times 5 =$	
numero degli esercizi senza risposta		$\times 1 =$	
valutazione esercizio n.15			
valutazione esercizio n.16			
valutazione esercizio n.17			
PUNTEGGIO TOTALE			

Con il contributo della società editrice **Zanichelli**
nell'occasione del centocinquantenario della sua fondazione
Visitate il sito internet delle olimpiadi: `http://olimpiadi.dm.unibo.it`

Problemi a risposta multipla – 5 punti

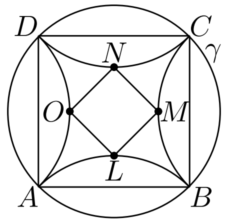
1. Quanti interi n sono tali che $\sqrt{n}$ differisce da $\sqrt{101}$ per meno di 1?
(A) 19 **(B)** 21 **(C)** 40 **(D)** 41 **(E)** 42.

2. Il perimetro di un rombo è 32 cm e ciascuno dei due angoli acuti misura 30°. Quanto vale il volume del solido ottenuto facendo ruotare il rombo intorno a un suo lato?
(A) $128\sqrt{3}\pi$ **(B)** 128π **(C)** $64(\sqrt{3}-1)\pi$ **(D)** 64π **(E)** $32\sqrt{3}\pi$.

3. Nell'ultimo capodanno, andavano molto di moda degli occhiali con la forma del numero "2009" e le lenti al posto dei due zeri. Per fabbricare occhiali simili, è necessario che nel numero che rappresenta l'anno vi siano due o più zeri consecutivi (per esempio 3500 va bene, 2010 no). Quanti anni compresi tra l'anno 999 e l'anno 9999 contengono due o più zeri consecutivi nella loro scrittura?
(A) 171 **(B)** 180 **(C)** 190 **(D)** 191 **(E)** 200.

4. A un tavolo, vi sono quattro persone: Luca, Maria, Nicola e Paola. Ognuno dei quattro mente sempre, oppure non mente mai. Inoltre non amano parlare di loro stessi, ma piuttosto dei loro amici; tant'è che quando gli viene chiesto chi di loro menta sempre,le loro risposte sono:
Luca: *"ogni ragazza è sempre sincera"*
Maria: *"ogni ragazzo è sempre bugiardo"*
Nicola: *"c'è una ragazza che mente sempre,l'altra è sempre sincera"*
Paola: *"uno dei ragazzi è sempre sincero, l'altro mai"*.
Sapreste dire quanti al tavolo sono sempre sinceri?
(A) Nessuno **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** tutti.

5. Un quadrato $ABCD$ di lato 1 è inscritto in una circonferenza γ. Si costruiscano i simmetrici degli archi $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DA}$ di γ rispetto ai lati AB, BC, CD, DA rispettivamente. Indichiamo con L, M, N, O i punti medi degli archi così ottenuti; quanto vale l'area di $LMNO$?
(A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **(B)** $\sqrt{2}-1$ **(C)** $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(D)** $\frac{1}{4}$ **(E)** $3-2\sqrt{2}$.



6. Un'urna contiene N palline ($N > 3$) numerate da 1 a N. Se dall'urna vengono tolte due palline recanti numeri non multipli di 3 e una recante un multiplo di 3, la probabilità di ottenere un multiplo di 3 estraendo una singola pallina risulta minore di quanto era con l'urna completa. Cosa si può dedurre riguardo a N?
(A) N è certamente multiplo di 3
(B) N non è multiplo di 3
(C) N è certamente dispari
(D) N è certamente pari
(E) nessuna delle affermazioni precedenti può essere dedotta.

7. Determinare il più grande intero n con questa proprietà: esistono n interi positivi distinti $a_1, \dots a_n$ tali che, comunque se ne scelgano fra essi due distinti, né la loro somma né la loro differenza siano divisibili per 100.
(A) 49 **(B)** 50 **(C)** 51 **(D)** 99 **(E)** 100.

8. Il minuscolo, ma preziosissimo, Diamante Dodecaedrico si trova a 2 metri dalla parete sud e 3 metri dalla parete ovest di una stanza rettangolare le cui pareti nord e sud sono lunghe 4 metri e quelle est e ovest sono lunghe 3 metri. Un ladro si cala dal soffitto all'interno della stanza e tocca il pavimento a un metro dalla parete sud e a un metro dalla parete ovest. Si accorge però che deve immediatamente disattivare il sistema di allarme, tagliando almeno in un punto un filo che corre ad altezza da terra costante lungo le quattro pareti perimetrali della stanza. Quanti metri è lungo il percorso più breve che deve compiere per raggiungere prima un punto qualsiasi di una delle pareti, e poi il Diamante Dodecaedrico?
(A) $3+\sqrt{2}$ **(B)** $2+\sqrt{5}$ **(C)** $\sqrt{17}$ **(D)** $\sqrt{13}$ **(E)** $2\sqrt{2}$.

9. Quanti interi positivi n hanno la proprietà che la loro rappresentazione in base 2 coincide con la rappresentazione in base 3 di $2n$?
(A) Nessuno **(B)**1 **(C)** 2 **(D)** più di 2, ma in numero finito **(E)** infiniti.

10. Alberto, Barbara e Carlo stanno giocando a carte. Ad ogni mano, il vincitore guadagna 2 punti, mentre gli altri due giocatori perdono un punto a testa. Inizialmente, tutti hanno 0 punti. Qual è la probabilità che, dopo 10 mani, siano nuovamente tutti a zero punti?
(A) 0 **(B)** $\frac{1}{5}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{\binom{10}{6}}{3^{10}}$ **(E)** $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$.

11. Nell'isola Chenonc'è ci sono 2009 abitanti, divisi in tre clan: i furfanti che mentono sempre, i cavalieri che non mentono mai, i paggi che mentono un giorno sì e uno no, in modo indipendente l'uno dall'altro. Un giorno chiedo a ciascuno degli abitanti quanti furfanti sono sull'isola. Il primo dice: *"c'è almeno 1 furfante"*; il secondo dice: *"ci sono almeno 2 furfanti"*;... il 2009-esimo dice: *"ci sono almeno 2009 furfanti"*. Scrivo in una lista la successione delle 2009 risposte, nell'ordine in cui sono state pronunciate. Il giorno dopo interrogo allo stesso modo tutti gli abitanti (non necessariamente nello stesso ordine), ed ottengo una lista delle risposte identica a quella del giorno precedente. Sapendo che c'è un solo cavaliere sull'isola, quanti paggi ci sono?
(A) Nessuno **(B)** 670 **(C)** 1004 **(D)** 1338 **(E)** 1339.

12. Francesco vuole scrivere il polinomio $x^{16} + x$ come prodotto di più polinomi a coefficienti interi, ognuno di grado almeno 1. Quanti fattori potràï¿$\frac{1}{2}$ ottenere al massimo?
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5.

Problemi a risposta numerica – 5 punti

13. Determinare il massimo intero positivo k tale che k^2 divide $\frac{n!}{(n-6)!}$ per ogni $n > 6$.

14. Sia x la più piccola delle due soluzioni dell'equazione $x^2 - 4x + 2 = 0$. Quali sono le prime tre cifre dopo la virgola nella scrittura (in base 10) del numero

$$x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2009}?$$

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

a) Qual è il minimo intero positivo c tale che esista almeno una coppia (a, b) di interi positivi distinti tali che $2c^2 = a^2 + b^2$?

b) Dimostrare che esistono infinite terne (a, b, c) di interi positivi distinti tali che $2c^2 = a^2 + b^2$.

SOLUZIONE

Nome:____________________ Cognome:____________________

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

È dato un triangolo ABC, rettangolo in A e con AC cateto maggiore; sia M il punto medio di BC, N il simmetrico di A rispetto a BC, O l'intersezione fra la perpendicolare ad MN passante per N e la retta contenente BC.

a) Dimostrare che l'angolo OMN è il doppio dell'angolo ACB.

b) Dimostrare che il rapporto fra le aree di MNO e ABC vale un quarto del rapporto fra le lunghezze di BC e HM, dove H è il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa di ABC.

SOLUZIONE

Nome:____________________________Cognome:____

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Determinare tutti gli interi positivi m per i quali sia $\dfrac{2 \cdot 5^m + 10}{3^m + 1}$ che $\dfrac{9^m + 1}{5^m + 5}$ sono interi.

SOLUZIONE

Nome:______________________ Cognome:______________________

UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2009

GARA di SECONDO LIVELLO

MIUR

Norme per la correzione ad uso degli insegnanti

Come per gli scorsi anni, la prova è distinta in due parti: la prima a risposte predefinite, la seconda di tipo compilativo.

PRIMA PARTE
Per la valutazione dei primi quattordici quesiti si potrà usufruire della mascherina che segue; le lettere o i numeri in ciascuna finestrella rappresentano, per ciascun quesito, le risposte esatte. Contrassegnando allora, per ogni elaborato, le risposte esatte con una sbarra e scrivendo nello spazio apposito il numero delle risposte esatte e quello delle caselle senza risposta si trova subito il punteggio globale di questa prima parte.
Si ricorda che alle risposte esatte vanno attribuiti **5 punti**, alle risposte non date (bianche) va attribuito **1 punto**, alle risposte errate vanno attribuiti **0 punti**.

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
D	B	A	C	E	B	C	D	C	A	D	E	12	414

SECONDA PARTE
Contrariamente ai primi quattordici quesiti, la cui valutazione è puramente meccanica, gli ultimi tre problemi richiedono una correzione attenta da parte dell'insegnante di matematica. Per alleviare il carico di lavoro degli insegnanti, che già tanti compiti debbono correggere e valutare, suggeriamo di effettuare la correzione soltanto di quegli elaborati che hanno ottenuto un punteggio di almeno 30 nella prima parte.
Per ottenere un minimo di omogeneità nella valutazione di questi esercizi diamo qualche indicazione sul punteggio da attribuire.

1. Ciascuno di tali esercizi sarà valutato con un numero intero da 0 a 10.
2. Si raccomanda di usare l'intero spettro dei punteggi disponibili, attribuendo zero, senza remore, alle soluzioni completamente sbagliate o non contenenti alcuna idea utile alla soluzione del problema e 10 a quelle corrette, anche se non coincidenti con quelle da noi proposte.
3. Valutare con punteggi intermedi soluzioni parziali o solo parzialmente corrette.

Scala di valutazione per la correzione dell'esercizio 15
Per la prima domanda si assegnino **6 punti** per chi svolge una dimostrazione completa utilizzando tutti i passaggi descritti nella soluzione proposta o anche altri, purché ovviamente corretti.
Per le soluzioni parziali, si assegnino:
2 punti a chi trova la terna $(5, 7, 1)$ (anche per tentativi)
1 punto a chi sviluppa ragionamenti corretti riguardanti la parità
1 punto per eventuali sostituzioni
1 punto a chi dimostra che c deve essere dispari
1 punto a chi dimostra che c non può essere 1 o 3.
Per la seconda domanda si assegnino **4 punti** per una dimpstrazione completa.
Per le soluzioni parziali, si assegnino:
2 punti se si osserva che le terne proporzionali a una terna che è soluzione sono ancora soluzioni, ma non conclude nulla riguardo la loro numero
–1 punto (penalizzazione) a chi non controlla che le terne trovate siano formate da numeri positivi.

Scala di valutazione per la correzione dell'esercizio 16
Per la prima parte si assegnino **3 punti** per chi svolge una dimostrazione interamente corretta, anche diversa da quella proposta;
Per le soluzioni parziali si assegnino:
2 punti a chi osserva che $C\widehat{M}A = 2C\widehat{B}A$ poiché M è il centro della circonferenza circoscritta ad ABC;
1 punto a chi osserva la congruenza fra gli angoli $N\widehat{M}O$ e $O\widehat{M}A$.
Per la seconda parte si assegnino **7 punti** per chi svolge una dimostrazione interamente corretta, anche diversa da quella proposta.
Per le soluzioni parziali si assegnino:
2 punti a chi dimostra che il rapporto tra le aree è uguale al rapporto fra le lunghezze delle ipotenuse;
3 punti a chi applica il primo Teorema di Euclide o utilizza una similitudine per ottenere MO in funzione di MN e HM;
1 punto per l'osservazione che la lunghezza di MN è metà di quella di BC.
Per un errore di costruzione che risulti in un problema perfettamente equivalente (ad esempio la collocazione di H come simmetrico di A rispetto a M anziché BC) si assegni una **PENALITÀ DI 2 PUNTI**, e si valuti poi la soluzione secondo i criteri elencati sopra.
Si noti che non è prevista alcuna penalità per soluzioni non corredate da una figura, purché sia chiara e corretta la parte testuale della dimostrazione.
Scala di valutazione per la correzione dell'esercizio 17
Proponiamo una scala di punteggio in caso la soluzione del candidato segua le idee della soluzione proposta. Lasciamo al docente il compito di giudicare eventuali soluzioni sostanzialmente diverse da quella proposta, tenendo presente che una soluzione logicamente corretta e completamente giustificata vale in ogni caso 10 punti, e che a soluzioni parziali possono essere dati i punteggi parziali della scala qui riportata. Per chi segue una strada simile alla soluzione proposta, o svolge solo parzialmente l'esercizio si assegnino:
1 punto a chi nota che $m = 1$ è soluzione;
4 punti per l'osservazione che condizione necessaria affinché le due espressioni date nel testo siano intere è che il loro prodotto sia intero;
2 punti a chi sostituisce $9^m + 1$ in termini di 3^m;
3 punti a chi conclude la soluzione notando che l'espressione scritta è limitata sia dal basso che dall'alto, e quindi esiste un solo valore di m accettabile.

1. La risposta è **(D)**. Indichiamo con $\mathcal{A}$ l'insieme degli interi n che soddisfano la proprietà richiesta. Osserviamo innanzitutto che: $\sqrt{101} - \sqrt{81} > \sqrt{100} - \sqrt{81} = 1$, cioè $81 \notin \mathcal{A}$.
   Se n è un intero positivo, la differenza
   $$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}},$$
   tra le radici quadrate di due interi consecutivi decresce al crescere di n. Di conseguenza $\sqrt{82} - \sqrt{81} > \sqrt{101} - \sqrt{100}$ cioè $\sqrt{101} - \sqrt{82} < \sqrt{100} - \sqrt{81} = 1$, e quindi $82 \in \mathcal{A}$; Allo stesso modo si dimostra che $122 \in \mathcal{A}$, infatti $\sqrt{122} - \sqrt{121} < \sqrt{101} - \sqrt{100}$, da cui $\sqrt{122} - \sqrt{101} < \sqrt{121} - \sqrt{100} = 1$. Per mostrare che $123 \notin \mathcal{A}$, si può fare il calcolo brutale $(\sqrt{123} - \sqrt{101})^2 = 123 + 101 - 2 \cdot \sqrt{123 \cdot 101}$, cioè si deve dimostrare che $224 > 2 \cdot \sqrt{12423}$ ovvero che $\sqrt{12423} < 112$; questo è vero perché $112^2 = 12544 > 12423$.
   In definitiva, $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N} \colon 82 \leq n \leq 122\}$ ed è composto da $122 - 82 + 1 = 41$ elementi.

2. La risposta è **(B)**. Si osserva che il solido di rotazione che si ottiene ruotando un rombo intorno a un suo lato può essere visto come un cono sovrapposto a un cilindro "scavato". La regione di spazio che viene scavata nel cilindro è uguale al cono sopra di esso, di conseguenza il volume V richiesto è equivalente al volume di un cilindro che ha per altezza il lato del rombo (8 cm) e per raggio l'altezza del rombo (metà del lato, cioè 4 cm). Il calcolo fornisce quindi $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 = 128\pi$

3. La risposta è **(A)**. Contiamo quanti sono gli anni che contengono due o più cifre zero consecutive; per fare questo, consideriamo inizialmente in quali posizioni possono essere le cifre zero e non-zero. È semplice vedere che le possibilità sono tre: X000, XX00, X00X (dove 0 rappresenta una cifra zero e X rappresenta un non-zero). Difatti in prima posizione non ci può essere uno zero a causa dell'intervallo di anni scelto. Ora, al posto di ogni X possiamo sostituire una cifra tra 1 e 9, e ogni possibile scelta "genera" un anno valido. Quindi per il primo *pattern* abbiamo 9 possibilità, per il secondo e per il terzo $9 \cdot 9 = 81$. In totale allora abbiamo $9 + 81 + 81 = 171$ anni validi.
   Si noti che se invece avessimo contato il numero di modi in cui si può sostituire una cifra da 1 a 9 a X e una cifra da 0 a 9 a Y nei due pattern X00Y e XY00, avremmo ottenuto un risultato errato perché avremmo contato due volte gli anni della forma X000.
   Il problema può essere risolto con un ragionamento quasi identico anche usando il *principio di inclusione–esclusione*.

4. La risposta è **(C)**. Certamente Luca non può essere sincero, in quanto le due ragazze si contraddicono, quindi non possono dire entrambe il vero. Se Maria dicesse il vero, Nicola mentirebbe; perciò, non è vero che c'è una ragazza sincera, e in particolare Maria non lo è, contraddizione. Quindi, Maria mente. C'è dunque almeno un ragazzo che dice sempre la verità, e si tratta necessariamente di Nicola. Quindi, per quello che dice, una delle due ragazze è sincera, e non potendo essere Maria, è Paola. D'altra parte, quest'ultima afferma che c'è un solo ragazzo che dice il vero, e da quanto dedotto prima, questa frase è vera. Quindi, a essere sinceri sono Nicola e Paola.

5. La risposta è **(E)**. Il raggio della circonferenza circoscritta al quadrato è $\frac{\sqrt{2}}{2}$, essendo metà della diagonale del quadrato stesso. Anche $LMNO$ è un quadrato, essendo la figura simmetrica per rotazioni di 90 gradi. Ora, i vertici del quadrato unitario dividono la circonferenza in quattro archi. I punti medi di questi hanno la stessa distanza dai lati del quadrato stesso dei punti L, M, N, O, essendo infatti simmetrici a essi rispetto ai rispettivi lati. Tale distanza risulta essere la differenza tra il raggio della circonferenza e metà del lato del quadrato, quindi $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. LN è uguale alla differenza tra il lato del quadrato unitario e due volte la distanza di cui sopra, vale a dire $2 - \sqrt{2}$. Infine, LN è la diagonale di $LMNO$, il cui lato è quindi $\sqrt{2} - 1$, e la cui area è $(\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$.

6. La risposta è **(B)**. In presenza di un numero finito di esiti possibili ed equiprobabili di un esperimento (nel nostro caso l'estrazione di una pallina dall'urna), la probabilità di un evento (per noi l'estrazione di una pallina con numero multiplo di 3) è il rapporto tra il numero di esiti favorevoli ed il numero di esiti possibili.
   Indichiamo con k il numero di palline con numero multiplo di 3 presenti inizialmente nell'urna;

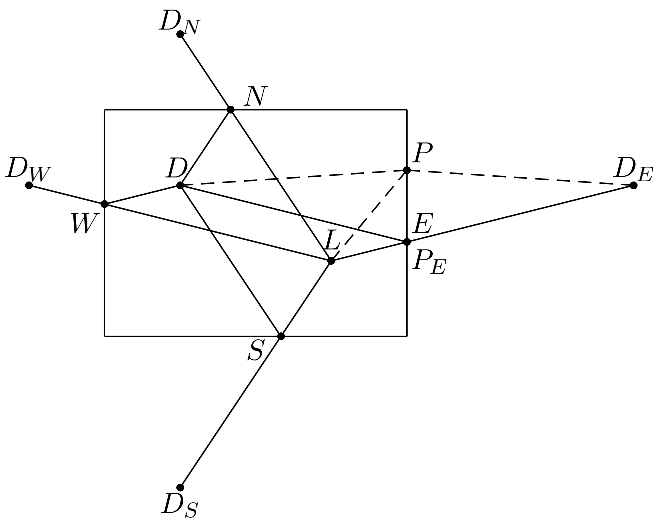
avremo $3k \leq N \leq 3k+2$. Dopo la sottrazione delle 3 palline dall'urna questa conterrà $N-3$ palline di cui $k-1$ con numero multiplo di 3. Siano p_1 e p_2 le probabilità di estrazione di una pallina con numero multiplo di 3 rispettivamente prima e dopo la sottrazione delle 3 palline. Allora:

$$p_1 - p_2 = \frac{k}{N} - \frac{k-1}{N-3} = \frac{N-3k}{N(N-3)}.$$

Nel caso in cui $N = 3k$ si ha $p_1 = p_2$ (quindi l'affermazione **A** è falsa); se invece $N = 3k+1$ o $N = 3k+2$ il numeratore è positivo per cui due numeri $3k+1$ e $3k+2$, essendo interi consecutivi, sono necessariamente uno pari ed uno dispari per cui non possiamo affermare con certezza né che N sia pari né che N sia dispari escludendo quindi le risposte **D** e **C**.

7. La risposta è **(C)**. Un numero è divisibile per 100 se e solo se la sua espressione decimale termina con 00.
Dividiamo gli interi $a_1, \ldots a_n$ in gruppi come segue: in un primo gruppo mettiamo quelli la cui espressione decimale termina con 00, in un secondo gruppo quelli che terminano con 01 (o hanno una sola cifra e quella cifra è 1) oppure con 99, in un terzo quelli che hanno come ultime due cifre 02 o 98 e così via, fino ad arrivare al cinquantunesimo gruppo, in cui inseriamo quelli che terminano con le cifre 50.
Se in uno stesso gruppo vi sono due interi, allora necessariamente la loro differenza, oppure la loro somma, sarà divisibile per 100: se infatti i due interi terminano con lo stesso gruppo di due cifre, allora la loro differenza termina con 00 ed è divisibile per 100; se invece terminano con gruppi di cifre diverse, il fatto che si trovino nello stesso gruppo fa sì che la loro somma sia divisibile per 100.
Dato che abbiamo esattamente 51 gruppi, n vale al massimo 51: se infatti avessimo 52 o più interi, almeno due ricadrebbero nello stesso gruppo e, per quanto detto, la loro differenza, o la loro somma, sarebbe divisibile per 100.
D'altra parte è facile convincersi che $100, 101, \ldots, 150$ è proprio un insieme di 51 interi positivi con la proprietà descritta nel testo, e dunque 51 è il numero richiesto.

8. La risposta è **(D)**. Sia L il punto del pavimento in cui "atterra" il ladro, D quello in cui si trova il diamante; siano D_E, D_W, D_N, D_S i simmetrici di D rispetto alle pareti est, ovest, nord, sud (E, W, N, S in figura). Immaginiamo che il ladro tocchi il filo (per poterlo tagliare) in un punto P della parete E, poi vada a prendere il diamante in D: il percorso che compie è di lunghezza (almeno) $LP + PD$, che è uguale per simmetria a $LP + PD_E$; dunque, ammesso che il ladro tagli il filo in un punto della parete E, il percorso più breve possibile, come conseguenza della diseguaglianza triangolare, è quello in cui P è allineato con L e D_E (tale punto è indicato con P_E in figura), ed è lungo $\sqrt{4^2+1} = \sqrt{17}$ metri.



Ripetendo lo stesso ragionamento per le altre tre pareti (e notando, per rispariare calcoli, che $LD_E = LD_W$, $LD_S = LD_N$) ci si riduce a confrontare le lunghezze di LD_E ed LD_N; ne risulta che la distanza minima da percorrere vale $\sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$ metri.

9. La risposta è **(C)**. Sia n un intero positivo. Siano $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_0$ le $k+1$ cifre, da sinistra a destra, della rappresentazione di n in base 2. Ognuno degli a_i assumerà un valore tra 0 e 1, e possiamo supporre senza perdita di generalità che $a_k = 1$. Perciò $n = 2^k a_k + 2^{k-1} a_{k-1} + \ldots + a_0$. In particolare vale la stima $n < 2^{k+1}$. Supponiamo ora che n soddisfi le ipotesi del problema, e quindi che $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_0$ siano anche le cifre della rappresentazione in base 3 di $2n$. Allora si ha $2n = 3^k a_k + 3^{k-1} a_{k-1} + \ldots + a_0$ e vale la stima $2n \geq 3^k$. Ora se $k \geq 4$ si ha $3^k > 2^{k+2}$ e quindi, mettendo insieme le stime ricavate sopra, otteniamo $2n \geq 3^k > 2^{k+2} > 2n$, che non è possibile. Quindi $k \leq 3$. Ora per ipotesi

$$27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 2(8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0)$$

ovvero

$$11a_3 + a_2 - a_1 - a_0 = 0$$

da cui si deduce subito che $a_3 = 0$ (altrimenti l'espressione a sinistra è maggiore di 8; gli a_i valgono o 0 o 1). Ora $a_2 - a_1 - a_0 = 0$ ha esattamente due soluzioni (con almeno una cifra diversa da 0), che sono $(a_2, a_1, a_0) = (1, 0, 1)$ e $(a_2, a_1, a_0) = (1, 1, 0)$ che corrispondono rispettivamente ai due numeri $n = 6$ e $n = 5$.

10. La risposta è **(A)**. Vogliamo dimostrare che è impossibile che tutti i giocatori, dopo 10 mani, abbiano nuovamente zero punti.
Sia v il numero di mani vinte dal primo giocatore quando tutti si ritrovano ad avere 0 punti, e p il numero di mani da lui perse.
Allora, per la regola data nel testo sull'assegnazione dei punti, si trova

$$0 = 2k - p$$

Per ipotesi si ha $k + p = 10$, il numero totale di mani giocate; sostituendo nell'equazione precedente si trova $0 = 2k - (10 - k)$, cioè $10 = 3k$.
L'unica soluzione a questa equazione è $k = \frac{10}{3}$, assurdo dal momento che k, rappresentando la quantità di mani vinte dal primo giocatore, dovrebbe essere intero. La situazione supposta è quindi impossibile, e la probabilità che tutti i giocatori abbiano 0 punti è dunque 0.

11. La risposta è **(D)**. Sia f il numero di furfanti e p il numero di paggi. In ognuna delle due liste risulteranno esattamente f affermazioni vere (le prime f) ed esattamente $2009 - f$ affermazioni false (le rimanenti). Quindi tra le due liste ci sono $4018 - 2f$ frasi false. Ora ogni furfante ha fornito 2 affermazioni false, mentre ogni paggio ne ha fornita solo una, giacché in una delle due giornate deve aver detto la veritá. Quindi il numero di frasi false deve egualiare il numero di paggi piú il doppio del numero dei furfanti, ovvero

$$4018 - 2f = 2f + p$$

e dal momento che $p + f = 2008$ (c'è un solo cavaliere) si puó ricavare $f = 670$ da cui $p = 2008 - 670 = 1338$.

12. La risposta è **(E)**. Ricordiamo la fattorizzazione notevole $a^k + b^k = (a+b)(a^{k-1} - a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 - \cdots + b^{k-1})$, valida per k dispari. Utilizzando due volte detta fattorizzazione (una volta con $k = 3$, una con $k = 5$) abbiamo

$$\begin{aligned} x^{16} + x =& x(x^{15} + 1) = x(x^5 + 1)(x^{10} - x^5 + 1) \\ =& x(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x^{10} - x^5 + 1). \end{aligned}$$

Però, sempre per la suddetta fattorizzazione, si ha che $x^{15} + 1$ è un multiplo anche di $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$. Dobbiamo quindi aspettarci che anche il fattore $x^2 - x + 1$ possa comparire nella scomposizione. In effetti, facendo la divisione tra polinomi, si ha che

$$x^{10} - x^5 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^8 + x^7 - x^5 - x^4 - x^3 + x + 1).$$

Questo porta ad almeno cinque i fattori ottenibili nella scomposizione. Poiché 5 è la risposta più alta presente tra le scelte, non è necessario dimostrare anche che i fattori trovati non sono ulteriormente scomponibili. Una dimostrazione completa di questo fatto è al di sopra del livello normalmente richiesto in questa gara; essa può essere ottenuta facendo la sostituzione $y = -x$ e utilizzando la teoria delle radici primitive complesse dell'unità, oppure direttamente per tentativi basandosi sul lemma di Gauss.

13. La risposta è 12. Sia $N = \dfrac{n!}{(n-6)!} = (n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n$.
Cerchiamo innanzitutto qual è il massimo q tale che q divide $N, \forall n$. Tra sei interi consecutivi tre sono divisibili per 2, di questi tre, uno è sicuramente divisibile per 4. Dunque 2^4 divide N. Tra sei

interi consecutivi ci sono due interi divisibili per 3. Dunque 3^2 divide N. Tra sei interi consecutivi, uno solo di essi è divisibile per 5. Dunque 5 divide N. Quindi

$$q \geq 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5. \tag{1}$$

Poiché cerchiamo il massimo q tale che q divide $N, \forall n$, consideriamo $n_1 = 7, n_2 = 13$. Sicuramente q divide sia N_1 che N_2 da cui si ha che

$$q \text{ divide MCD}\,(N_1, N_2) \tag{2}$$

Si trova che $N_1 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$, $N_2 = 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13$. Allora MCD $(N_1, N_2) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. Ora, dalla 1 e dalla 2 si deduce che $q = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. Volendo estrarre da q il massimo quadrato, si trova che $k^2 = 2^4 \cdot 3^2$ cioè $k = 12$.

14. La risposta è 414. Dalla consueta formula risolutiva per le equazioni di secondo grado, si ha $x = 2 - \sqrt{2}$. Utilizzando ora la formula per la somma di una progressione geometrica, abbiamo

$$\begin{aligned} x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2009} &= x(1 + x + x^2 + \cdots + x^{2008}) \\ &= x\frac{1 - x^{2009}}{1 - x} = \frac{x}{1 - x} - \frac{x^{2010}}{1 - x}. \end{aligned}$$

Il secondo termine di questa somma è molto piccolo: difatti, con stime molto larghe, otteniamo

$$(2 - \sqrt{2})^{2010} < (0.6)^{2010} < \left((0.6)^2\right)^{1005} < \frac{1}{2^{1005}} < \frac{1}{(2^{10})^{100}} < \frac{1}{10^{100}}.$$

Il primo termine d'altra parte vale

$$\frac{x}{1 - x} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{(2 - \sqrt{2})(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{2}}{1}.$$

Quindi il valore dell'espressione è una quantità che differisce da $\sqrt{2}$ per un numero grande meno di 10^{-100}; le prime cifre del suo sviluppo decimale saranno quindi le stesse di $\sqrt{2}$, cioè $1.414\ldots$.

15. Quesito a)
Poiché a e b hanno la stess parità, posso porre $a = x + y$ e $b = x - y$ e l'equazione diventa $2c^2 = 2x^2 + 2y^2$ e quindi il più piccolo c è dato dalla più piccola terna pitagorica $(x, y, c) = (3, 4, 5)$, cha dà $(a, b, c) = (7, 1, 5)$.
Quesito b)
Basta osservare che anche $(7k, k, 5k)$ è soluzione per ogni k positivo.
Seconda Soluzione
Quesito a)
L'equazione è simmetrica in a e b, risolviamo per $a > b$. Conviene porre $a = c + n$ e $b = c - m$, $n, m > 0$. L'equazione diventa allora $2c(m - n) = n^2 + m^2$. Quindi 2 divide $n^2 + m^2$, quindi n e m hanno la stessa parità. Possiamo allora effettuare un nuovo cambio di variabili $\alpha = \dfrac{n + m}{2}$ e $\beta = \dfrac{m - n}{2}$, con $\alpha > \beta$. Si ha $2c\beta = \alpha^2 + \beta^2$. Per le stesse ragioni di prima si ottiene che α e β hanno la stessa parità, inoltre si deve avere $\beta|\alpha^2 + \beta^2$, cioè $\beta|\alpha$. Poniamo $\alpha = k\beta$. Si ha allora $c = \dfrac{(k^2 + 1)\beta}{2}$. Questa è una funzione crescente sia rispetto a k che rispetto a β. Quindi dovrò prendere k e β più piccoli possibile. La condizione $\alpha > \beta$ impone $k >= 2$, mentre non ho condizioni su β, quindi $\beta >= 1$. Se $\beta = 1$ allora $k^2 + 1$ deve essere pari e quindi il più piccolo valore di k possibile è 3, se $\beta = 2$ posso prendere anche $k = 2$. Per valori maggiori di β, il minimo k che posso sempre prendere è $k = 3$ per i β dispari e $k = 2$ per i β pari, e poiché c è crescente in β, questi valori risulteranno maggiori rispettivamente di quello ottenuto con $(k, \beta) = (3, 1)$ per i β dispari e di quello ottenuto per (k, β)=$(2, 2)$ per i β pari.
Calcolando i due valori di c per queste due coppie si ottiene $c = 5$ i entrambi i casi. Bisogna ora vedere se almeno una di questa due coppie (k, β) dà una coppia (a, b) di interi positivi. Facendo i passaggi inversi si ottiene $(a, b) = (7, 1)$ per la coppia $(k, \beta) = (3, 1)$ e $(a, b) = (7, -1)$ per

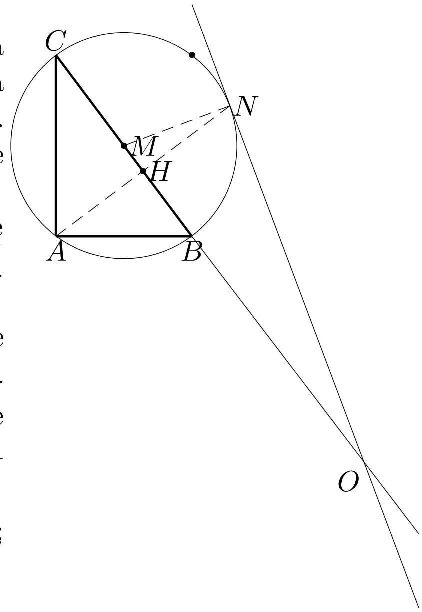
$(k, \beta) = (2, 2)$. Solo la coppia $(7, 1)$è quindi accettabile. Oltre a questa dovremo prendere per simmetria anche $(1, 7)$. Le terne sono quindi $(7, 1, 5)$ e $(1, 7, 5)$. E il minimo c è 5.
Quesito b)
Basta osservare che per ogni k dispari e $k >= 3$ ottengo una terna di (a, b, c) interi cheè soluzione, infatti:

$$k = 2h + 3$$
$$(a, b, c) = (2(h + 2)^2 - 1)\beta, (2(h + 1)^2 - 1)\beta, (2h^2 + 6h + 5)\beta)$$

con $a, b, c > 0$
Oppure che per k pari e $k >= 4$ e per ogni β pari si ottiene una terna di interi (a, b, c) cheè soluzione, infatti

$$k = 2h + 4$$
$$\beta = 2\gamma$$
$$(a, b, c) = (((2h + 5)^2 - 2)\gamma, ((2h + 3)^2 - 2)\gamma, (4h^2 + 8h + 5)\gamma)$$

con $a, b, c > 0$.



16. Il punto medio M dell'ipotenusa BC è anche il centro della circonferenza circoscritta al triangolo ABC; l'angolo al centro $A\widehat{M}B$ e l'angolo alla circonferenza $A\widehat{C}B$ insistono sullo stesso arco, da cui $A\widehat{M}B = 2A\widehat{C}B$. Inoltre $A\widehat{M}B = O\widehat{M}N$, data la simmetria di A e N rispetto a BC; se ne ricava proprio che $O\widehat{M}N = 2A\widehat{C}B$.
Le aree rispettive del triangolo MNO e del triangolo ABC, calcolate scegliendo come base l'ipotenusa in entrambi i casi, valgono $\dfrac{MO \cdot NH}{2}$ e $\dfrac{BC \cdot AH}{2}$; ma, dato che per simmetria $NH = AH$, il rapporto fra le aree vale esattamente quanto il rapporto tra MO e BC. Il primo teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo MNO dà la relazione $\dfrac{MO}{MN} = \dfrac{MN}{HM}$, cioè $MO = \dfrac{MN^2}{HM}$. D'altra parte si ha anche $MN = AM$ (per simmetria) e $AM = MB = \dfrac{BC}{2}$ (raggi della stessa circonferenza); perciò $\dfrac{MO}{BC} = \dfrac{BC^2}{4BC \cdot HM} = \dfrac{BC}{4HM}$, da cui la tesi.

17. Notiamo che se $a = \dfrac{2 \cdot 5^m + 10}{3^m + 1}$ e $b = \dfrac{9^m + 1}{5^m + 5}$ sono entrambi interi, allora anche il loro prodotto,

$$ab = \frac{(2 \cdot 5^m + 10)(9^m + 1)}{(3^m + 1)(5^m + 5)},$$

è ancora intero.
Raccogliendo ora un fattore due a numeratore, questa espressione si riscrive

$$\frac{2(5^m + 5)(9^m + 1)}{(3^m + 1)(5^m + 5)} = \frac{2(9^m + 1)}{3^m + 1}.$$

Vediamo ora per quali m questa espressione è un intero. Notando che $9^m + 1 = (3^m + 1)^2 - 2 \cdot 3^m$, possiamo ulteriormente trasformare il prodotto ab nella forma

$$ab = 2 \cdot \frac{(9^m + 1)}{3^m + 1} = 2 \cdot \frac{(3^m + 1)^2 - 2 \cdot 3^m}{3^m + 1} = 2(3^m + 1) - 4\frac{3^m}{3^m + 1}$$

che è un intero se e solo se $4\dfrac{3^m}{3^m + 1}$ lo è.
Dimostriamo ora che $2 < 4\dfrac{3^m}{3^m + 1} < 4$.

Infatti, dal momento che $m \geq 1$, si ha $3^m \geq 3$, e dunque $2 \cdot 3^m + 2 < 2 \cdot 3^m + 2 \cdot 3^m < 4 \cdot (3^m + 1)$; dividendo questi tre termini per $3^m + 1$ troviamo allora $2 < 4\dfrac{3^m}{3^m + 1} < 4$ come voluto.

Perciò, se $4\dfrac{3^m}{3^m + 1}$ è intero, esso deve necessariamente essere uguale a 3, perchè è strettamente compreso tra 2 e 4.

Imponendo questa uguaglianza otteniamo $4 \cdot 3^m = 3 \cdot (3^m + 1) \Rightarrow 3^m = 3 \Rightarrow m = 1$.

Perciò, se esiste un m con la proprietà richiesta, questo deve essere uguale ad 1. È d'altra parte facile verificare che $\dfrac{2 \cdot 5^1 + 10}{3^1 + 1} = 5$ e $\dfrac{9^1 + 1}{5^1 + 5} = 1$ sono entrambi interi. Se ne conclude quindi che $m = 1$ è effettivamente soluzione ed è l'unica.