Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea Specialistica in Matematica

Sintesi

presentata da

Paola Stolfi

# Superfici Algebriche Razionali

Relatore

Prof. Edoardo Sernesi

Anno Accademico 2010-2011

Luglio 2011

Parole chiave: Trasformazioni monoidali, Trasformazioni cremoniane, Superfici di Del Pezzo, Superfici rigate.

Classificazione AMS:14E05,14J26.

Questa tesi si propone di passare in rassegna alcune famiglie di esempi classici di superfici algebriche. Per motivi di spazio e per la loro maggiore importanza si è scelto di concentrarsi sulle superfici razionali e su alcune costruzioni geometriche ad esse collegate.
In questo elaborato viene perciò sviluppata una parte della teoria della classificazione delle superfici.
Lo studio delle superfici algebriche e più in generale delle varietà algebriche dal punto di vista degli invarianti birazionali è nato con il matematico italiano Luigi Cremona (1830-1903). Molti dei suoi studi infatti, si concentrarono sulle trasformazioni birazionali del piano e dello spazio, tanto che vennero poi chiamate trasformazioni cremoniane.
Sebbene i primi esempi di questo tipo di trasformazioni risalgano a Poncelet (1822), a Plücker (1830), e a Steiner (1832), Cremona fu il primo a formalizzare tale nozione e ad usarla in modo sistematico per lo studio delle varietà algebriche.
Seguendo gli studi di Cremona, Brill e Noether in *Über die algebraische Funktionen und die Anwendung in der Geometrie* (1873), introdussero un nuovo linguaggio geometrico per lo studio delle curve, basato sui sistemi lineari. Grazie a questo nuovo linguaggio, Brill e Noether diedero una dimostrazione algebrico-geometrica del teorema di Riemann-Roch. Noether estese questo linguaggio anche alle superfici, considerando perciò sistemi lineari di curve, e definendo anche per le superfici il sistema canonico $K$. Nello stesso periodo, Clebsch e Noether raggiunsero i primi risultati riguardanti la teoria delle superfici algebriche. Vennero introdotti gli invarianti birazionali delle superfici, genere geometrico $p_g$ e genere aritmetico $p_a$ e dopo aver dimostrato che $p_g \geq p_a$ venne introdotto il numero non negativo $q = p_g - p_a$, detto irregolarità.
Noether si addentrò anche nello studio della razionalità delle superfici, cercando criteri generali, infatti nel 1870 enunciò il suo criterio di razionalità che afferma che una superficie è razionale se e solo se contiene un sistema lineare di dimensione positiva di curve razionali.
Gli studi di Noether vennero raccolti in seguito dai matematici italiani di quel periodo, C. Segre, E. Bertini, G. Castelnuovo e F. Enriques. Loro introdussero il *metodo iperspaziale*, fornendo un'interpretazione geometrica

dei sistemi lineari di curve su una superficie. Essi passarono dal concetto di curva $C$ al concetto di sistema lineare di divisori $|C|$, definirono il sistema canonico e svilupparono tutta la teoria dell'intersezione, fino ad arrivare alla formula di aggiunzione la quale afferma che per ogni curva della superficie il sistema lineare completo $|K + C|$ taglia su $C$ i divisori canonici di $C$. Applicando tutta questa nuova teoria, essi arrivarono a dare una dimostrazione del teorema di Riemann-Roch per le superfici.
Castelnuovo ed Enriques contribuirono profondamente con i loro studi alla classificazione delle superfici. Il loro metodo per lo studio delle superfici era basato sull'analisi delle famiglie di curve che appartengono alla superficie; in tale analisi il concetto di sistema lineare ampio risultò di fondamentale importanza. Il genere geometrico venne reinterpretato come il massimo numero di curve canoniche linearmente indipendenti e si definirono altri invarianti birazionali, i plurigeneri $p_i$, che equivalgono al massimo numero di curve $i-$canoniche linearmente indipendenti. Questi nuovi invarianti risultarono immediatamente di fondamentale importanza nella classificazione delle superfici, in quanto permisero di costruire modelli molto semplici detti modelli minimali, ai quali ogni altra superficie si può ricondurre. Esempi importanti di superfici sono quelle studiate dal matematico Pasquale Del Pezzo (1859-1936) in *Sulle superficie dell'ordine n immerse negli spazi di n+1 dimensioni* (1885) e in *Sulle superficie dell'$n^{mo}$ ordine immerse nello spazio di n dimensioni* (1887).
Tutto questo materiale viene raccolto nelle due memorie di Enriques *Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche* (1893) e *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (1996). Con tutta questa teoria a disposizione, Castelnuovo ed Enriques affrontarono in modo moderno la classificazione delle superfici, cioè tramite la distinzione delle classi di equivalenza birazionale delle superfici minimali in base agli invarianti $p_i$, $p_a$ e $q$.
Nel 1896 Enriques inviò una lettera a Castelnuovo in cui fornì un controesempio alla congettura di Noether che sosteneva che condizione necessaria e sufficiente affinché una superficie fosse razionale era $p_g = q = 0$. Il controesempio che Enriques aveva prodotto era una superficie di grado sei in $\mathbb{P}^3$ con punti doppi lungo gli spigoli di un tetraedro, per cui era soddisfatta la condizione $p_g = q = 0$ ma per cui $p_2 = 1$, superficie che in seguito verrà

chiamata superficie di Enriques.

Fu proprio lo studio di questa superficie a condurre Castelnuovo alla dimostrazione del suo criterio di razionalità secondo il quale una superficie è razionale se e solo se $q = p_2 = 0$. Questo risultato rispose anche al problema di L*ü*roth per le superfici, cioè al chiedersi se una varietà unirazionale sia anche razionale. L*ü*roth e Clebsch avevano dimostrato che per le curve la risposta è affermativa. Il criterio di Castelnuovo permise di dare una risposta affermativa nel caso delle superfici.

Il criterio di Castelnuovo è il fulcro della classificazione delle superfici. A tale progetto, iniziato da Castelnuovo ed Enriques, a partire dal 1900 si unirono F. Severi e altri allievi della scuola italiana.

Gli argomenti trattati in questa tesi sono in particolare i seguenti.

Nel primo capitolo vengono date nozioni preliminari, necessarie ad analizzare le superfici razionali. Vengono richiamati i concetti di divisori e fasci invertibili e ne vengono date le principali proprietà e risultati. In particolare si mette in evidenza il concetto di divisore molto ampio su una varietà, come un divisore che definisce una immersione della varietà in uno spazio proiettivo. Successivamente si definisce il fascio canonico $\omega$ e i divisori $K$.

**Definizione 1.** *Sia $X$ una varietà nonsingolare di dimensione $n$ su $k$. Definiamo il* fascio canonico $\omega_X$ *di $X$ come l'$n$-esima potenza esterna del fascio di differenziali, cioè $\omega_X = \bigwedge^n \Omega_{X/k}$.*

Il fascio canonico è un fascio invertibile, perciò possiamo associargli una classe di equivalenza lineare di divisori. Definiamo un *divisore canonico* $K_X$ come un qualunque divisore nella classe di equivalenza lineare che corrisponde al fascio canonico $\omega_X$.

Vengono poi definiti il genere geometrico e il genere aritmetico.

**Definizione 2.** *Se $X$ è una varietà nonsingolare e proiettiva su $k$ allora si definisce il* genere geometrico *di $X$ come*

$$p_g(X) = dim_k \Gamma(X, \omega_X)$$

*e il* genere aritmetico $p_a$ *come*

$$p_a(X) = (-1)^r (\chi(\mathscr{O}_X) - 1)$$

*dove* $\chi(\mathscr{O}_X) = \sum(-1)^i dim_k H^i(X, \mathscr{O}_X)$ *è la* caratteristica di Eulero *di* $\mathscr{O}_X$.

Il penultimo paragrafo di questo capitolo è dedicato alla geometria delle superfici, vengono perciò definiti il numero di intersezione e l'autointersezione di divisori.

**Definizione 3.** *Sia $X$ una superficie. Siano $C$ e $C'$ curve distinte, e sia $P \in C \cap C'$, allora si definisce la* molteplicità di intersezione in *$P$ di $C$ e $C'$, denotata $(C.C')_P$, come la lunghezza di $\mathscr{O}_{P,X}/(f,g)$, dove $f$ e $g$ sono le equazioni locali rispettivamente di $C$ e $C'$ in $P$. Definiamo allora il* numero di intersezione *di due curve distinte $C$ e $C'$ come*

$$C.C' = \sum_{P \in C \cap C'} (C.C')_P.$$

**Proposizione 1.** *Siano $C$ e $C'$ due curve distinte. Allora:*

$$C.C' = deg_C(\mathscr{L}(C') \otimes \mathscr{O}_C). \tag{1}$$

Osserviamo che il secondo membro della (1) è ben definito anche quando $C = C'$. Pertanto si può definire l'auto-intersezione

$$C^2 = \deg_C(\mathscr{L}(C) \otimes \mathscr{O}_C).$$

Il numero di intersezione di due divisori $D.D'$ si ottiene estendendo per linearità la definizione data per due curve:

$$D.D' = \left(\sum_i n_i C_i\right) \cdot \left(\sum_j m_j C'_j\right) = \sum_{i,j} n_i m_j C_i.C'_j.$$

Infine nell'ultimo paragrafo si enunciano il teorema di Riemann-Roch per le curve, la formula di aggiunzione e il teorema di Riemann-Roch per le superfici.

**Teorema 1.** *Sia $D$ un divisore su una curva $C$ di genere $p_g$. Allora*

$$l(D) - l(K_C - D) = deg(D) + 1 - p_g$$

*dove $l(D) = dim_k H^0(X, \mathscr{L}(D))$, $K_C$ è un divisore canonico della curva $C$ e il divisore $K_C - D$ corrisponde al fascio invertibile $\omega_C \otimes \mathscr{L}(D)^\vee$*

**Proposizione 2.** *Sia $C$ una curva nonsingolare di genere $p_g$ sulla superficie $X$, e sia $K_X$ è il divisore canonico su $X$, allora:*

$$2p_g - 2 = C.(C + K_X).$$

**Teorema 2.** *Se $D$ è un divisore su una superficie $X$, allora*

$$l(D) - s(D) + l(K_X - D) = \frac{1}{2}D.(D - K_X) + 1 + p_a$$

*dove $l(D) = dim_k H^0(X, \mathscr{L}(D))$ e $s(D) = dim H^1(X, \mathscr{L}(D))$.*

Nel secondo capitolo, dopo aver fissato la terminologia riguardante le applicazioni razionali, viene analizzato un particolare tipo di applicazioni birazionali, le trasformazioni monoidali o scoppiamento di un insieme finito di punti su una superficie.

**Definizione 4.** *Sia $U \subset X$ un aperto affine tale che $P \in U$, siano $u_0, u_1$ funzioni regolari su $U$ tali che le equazioni $u_0 = u_1 = 0$ abbiano $P$ come unica soluzione e tali che formino un sistema locale di parametri di $X$ in $P$. Consideriamo il prodotto $U \times \mathbb{P}^1$, e la sottovarietà $\tilde{U} \subset U \times \mathbb{P}^1$ definita dall'equazione*

$$u_1(x)t_0 = u_0(x)t_1$$

*dove $[t_0, t_1] \in \mathbb{P}^1$.*
*La proiezione $\pi : U \times \mathbb{P}^1 \to U$ induce un isomorfismo tra $\tilde{U} \setminus \pi^{-1}(\{P\})$ e $U \setminus \{P\}$. Definiamo $\tilde{X} = X \setminus \{P\} \cup \tilde{U}$ incollate lungo gli aperti $U \setminus \{P\} = \tilde{U} \setminus \pi^{-1}(\{P\})$. Allora l'applicazione regolare $\pi : \tilde{X} \to X$ indotta da $\pi : U \times \mathbb{P}^1 \to U$ è lo scoppiamento di $X$ in $P$.*

I morfismi birazionali tra superfici si fattorizzano tramite trasformazioni monoidali.

**Teorema 3.** *Sia $f : X' \to X$ un morfismo birazionale di superfici. Sia $P$ un punto fondamentale di $f^{-1}$. Allora $f$ si fattorizza attraverso la trasformazione monoidale $\pi : \tilde{X} \to X$ centrata in $P$.*

Abbiamo mostrato come avere informazioni sui numeri di intersezione di una superficie ottenuta tramite una trasformazione monoidale, in base ai numeri di intersezione della superficie di partenza, come cambia il divisore canonico tramite una trasformazione monoidale e vedremo il concetto di trasformata stretta e totale di una curva. Un altro concetto molto importante, sempre inerente le trasformazioni monoidali, è quello di punti infinitamente vicini. A conclusione del paragrafo sulle trasformazioni monoidali, viene enunciato il criterio di contrazione Castelnuovo.

**Teorema 4.** *Se $C$ è una curva su una superficie $X$ con $C \cong \mathbb{P}^1$ e $C^2 = -1$ allora esiste un morfismo $f : X \to X_0$ su una superficie proiettiva non singolare e un punto $P \in X_0$ tale che $X$ è isomorfa tramite $f$ alla trasformazione monoidale di $X_0$ centrata in $P$, e $C$ è la curva eccezionale.*

Successivamente viene trattata la relazione che intercorre tra i sistemi lineari e le applicazioni razionali. Si passa poi a definire la risoluzione di applicazioni razionali.

**Definizione 5.** *Sia $X$ una varietà proiettiva. Una* risoluzione *di una applicazione razionale $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ è una coppia di applicazioni $(\pi, \sigma)$ tali che $\pi : Y \to X$ è un morfismo birazionale, $\sigma : Y \to X'$ è un morfismo e il seguente diagramma*

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\sigma"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "f"] & & \mathbb{P}^m \end{tikzcd}$$

*è commutativo, cioè $f = \sigma \circ \pi^{-1}$ e $\pi$ è un isomorfismo su dom($f$).*

Nel paragrafo successivo vengono introdotte le trasformazioni cremoniane del piano proiettivo, cioè le trasformazioni birazionali di $\mathbb{P}^2$, e vengono date le condizioni affinché un sistema lineare definisca una trasformazione cremoniana, tali sistemi vengono chiamati sistemi omaloidali. Nei paragrafi successivi vengono descritti due esempi di trasformazioni cremoniane, le trasformazioni quadratiche e le trasformazioni di De Jonquières.
Il terzo capitolo è dedicato alle superfici di Del Pezzo e alle loro proprietà.

**Definizione 6.** *Una* superficie di Del Pezzo *$S$ è una superficie il cui divisore anticanonico $-K_S$ è ampio. Una* superficie di Del Pezzo debole *è una superficie il cui divisore anticanonico $-K_S$ è nef e grande.*

**Lemma 1.** *Sia $S$ una superficie di Del Pezzo debole. Allora ogni curva irriducibile $C$ su $S$ avente autointersezione negativa è una curva razionale nonsingolare con $C^2 = -1$ o $C^2 = -2$.*

Viene data una costruzione di queste superfici tramite lo scoppiamento di punti.

**Proposizione 3.** *Sia $\mathfrak{d} = |3L - P_1 - \cdots - P_r|$ il sistema lineare su $\mathbb{P}^2$ di cubiche piane passanti per i punti $P_1, \ldots, P_r$. Supponiamo che non ci siamo tre punti collineari e non ci siano 7 punti che giacciono su una conica. Se $r \leq 7$ allora $\mathfrak{d}$ non ha punti base non assegnati.*

**Corollario 1.** *Con le stesse ipotesi del teorema precedente si ha:*

1. *se $r \leq 7$, allora $\dim \mathfrak{d} = 9 - r$;*

2. *se $r = 8$, allora $\dim \mathfrak{d} = 1$ e quasi tutte le curve in $\mathfrak{d}$ sono irriducibili.*

**Teorema 5.** *Sia $\mathfrak{d}$ il sistema lineare di curve cubiche piane aventi come punti base un insieme di $r$ punti in posizione generale. Se $r \leq 6$, allora il corrispondente sistema lineare $\mathfrak{d}'$ sulla superficie $X'$ ottenuta dallo scoppiamento di $P_1, \ldots, P_r$ su $\mathbb{P}^2$ è molto ampio.*

**Corollario 2.** *Con le stesse ipotesi del capitolo precedente per ogni $r = 0, 1, \ldots, 6$, otteniamo una immersione di $X'$ in $\mathbb{P}^{9-r}$ di una superficie di grado $9 - r$, il cui fascio canonico $\omega_{X'} \cong \mathscr{O}_{X'}(-1)$. Quindi $X'$ è una superficie di Del Pezzo.*

Si passa poi ad analizzare il modello anticanonico delle superfici di Del Pezzo, modello che viene effettivamente usato per studiare queste superfici. Sia ha infatti il seguente risultato.

**Teorema 6.** *Sia $S$ una superficie di Del Pezzo debole di grado $d$ e sia $\mathcal{N}$ l'insieme delle $(-2)-$curve su $S$. Allora*

1. *$|-K_S|$ non ha componenti fisse;*

2. *se $d \geq 2$, $|-K_S|$ non ha punti base;*

3. *se* $d \geq 3$, $|-K_S|$ *definisce una applicazione* $\varphi$ *su* $\mathbb{P}^d$ *che è un isomorfismo al di fuori di* $\mathcal{N}$*. La superficie immagine* $\bar{S}$ *è una superficie normale non degenere di grado d;*

4. *se* $d = 2$, $|-K_S|$ *definisce una applicazione regolare* $\phi : S \to \mathbb{P}^2$ *che si fattorizza tramite un morfismo birazionale* $f : S \to \bar{S}$ *su una superficie normale e una applicazione finita* $\pi : \bar{S} \to \mathbb{P}^2$ *di grado due la cui curva di diramazione è una curva di grado quattro.*

5. *Se* $d = 1$, $|-2K_S|$ *definisce una applicazione regolare* $\phi : S \to \mathbb{P}^3$ *che si fattorizza tramite un morfismo birazionale* $f : S \to \bar{S}$ *su una superficie normale e una applicazione finita* $\pi : \bar{S} \to Q \subset \mathbb{P}^3$ *di grado due, dove* $Q$ *è un cono quadratico. Il morfismo* $\pi$ *ha come curva di diramazione una curva di grado sei tagliata su* $Q$ *da una superficie cubica.*

Si prendono poi in considerazione alcune superfici di Del Pezzo particolari, e cioè quelle di grado quattro, tre, due e uno. Nel paragrafo in cui è stata studiata la superficie di Del Pezzo di grado due, abbiamo inserito anche lo studio di una trasformazione cremoniana, l'involuzione di Geiser. Il motivo per il quale è stata inserita in questo paragrafo è il seguente. Lo scoppiamento su $\mathbb{P}^2$ dell'insieme dei punti che definisce una superficie di Del Pezzo di grado due insieme alla contrazione delle $(-2)-$curve di questa superficie risulta essere la risoluzione dell'involuzione di Geiser. Allo stesso modo, nel paragrafo riguardante le superfici di Del Pezzo di grado uno, è stato inserito lo studio dell'involuzione di Bertini, anch'essa una trasformazione cremoniana che in questo caso però si può definire tramite il modello antibicanonico della superficie di Del Pezzo di grado uno.
Il quarto capitolo tratta le superfici rigate razionali.

**Definizione 7.** *Sia* $C$ *una curva nonsingolare. Una* superficie rigata $S$ *è una superficie birazionalmente equivalente a* $C \times \mathbb{P}^1$*. Se* $C = \mathbb{P}^1$*, allora* $S$ *è una* superficie rigata razionale. *Una* superficie geometricamente rigata $S$ *su* $C$ *è una superficie con un morfismo suriettivo, nonsingolare* $\pi : X \to C$ *tale che le fibre* $X_y$ *sono isomorfe a* $\mathbb{P}^1$ *per ogni* $y \in X$*.*

Si dimostra il teorema di Noether-Enriques.

**Teorema 7.** *Sia $S$ una superficie e sia $\pi : S \to C$ un morfismo su una curva nonsingolare $C$. Supponiamo che esiste $x \in C$ tale che $\pi$ è nonsingolare su $x$ e che la fibra $\pi^{-1}(x)$ è isomorfa a $\mathbb{P}^1$. Allora esiste un sottoinsieme aperto $U$ contenente $x$ e un isomorfismo da $\pi^{-1}(U)$ a $U \times \mathbb{P}^1$ tale che il diagramma*

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{P}^1 \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

*è commutativo. In particolare $S$ è rigata.*

Si dimostra che le superfici rigate razionali possono essere rappresentante tramite un sistema lineare su $\mathbb{P}^2$; tale sistema lineare è del tipo $C^n\left[(n-1)^1, 1^{n-1}\right]$ cioè un sistema lineare di curve di grado $n$ passanti semplicemente per $n-1$ punti e per un punto con molteplicità $n-1$. Inoltre viene dimostrato che queste superfici possono essere rappresentate anche tramite fasci localmente liberi di rango due.

**Proposizione 4.** *Se $\pi : S \to C$ è una superficie rigata, allora esiste un fascio $\mathscr{E}$ localmente libero di rango due su $C$ tale che $S \cong \mathbb{P}(\mathscr{E})$ su $C$. Viceversa dato un fascio $\mathscr{E}$ localmente libero di rango due su una curva $C$ non singolare, $\mathbb{P}(\mathscr{E})$ è una superficie rigata su $C$. Se $\mathscr{E}$ e $\mathscr{E}'$ sono due fasci localmente liberi di rango due su $C$, allora $\mathbb{P}(\mathscr{E})$ e $\mathbb{P}(\mathscr{E}')$ sono isomorfi come superfici rigate su $C$ se e solo se esiste un fascio invertibile $\mathscr{L}$ su $C$ tale che $\mathscr{E}' \cong \mathscr{E} \otimes \mathscr{L}$.*

**Proposizione 5.** *Ogni fibrato vettoriale di rango due su $\mathbb{P}^1$ è decomponibile, cioè è somma di due fasci invertibili. In particolare ogni superficie rigata su $\mathbb{P}^1$, cioè razionale, è isomorfa a una delle superfici*

$$\mathbb{F}_n = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$$

*per $n \geq 0$*

Come conseguenza di questa rappresentazione si hanno i seguenti risultati.

**Proposizione 6.** *Sia $S = \mathbb{P}_C(\mathscr{E})$ una superficie geometricamente rigata di base $C$, e $p : S \to C$ il morfismo strutturale. Sia $H \subset X$ una sezione e sia $F$ una fibra. Allora*

$$Pic(S) \cong p^* Pic(C) \oplus \mathbb{Z}.H$$

**Proposizione 7.**

1. *Si ha $Pic(\mathbb{F}_n) = \mathbb{Z}H \oplus \mathbb{Z}F$, con $F^2 = 0$, $F.H = 1$ e $H^2 = n$;*

2. *Se $n > 0$, esiste un'unica curva irriducibile $B$ su $\mathbb{F}_n$ con auto-intersezione negativa; se $b$ è la sua classe in $Pic(\mathbb{F}_n)$ allora si ha $b = H - nF$ e $b^2 = -n$;*

3. *$\mathbb{F}_n$ non è isomorfa ad $\mathbb{F}_m$ per $n \neq m$; $\mathbb{F}_n$ è minimale per $n \neq 1$ ed $\mathbb{F}_1$ è isomorfa allor scoppiamento di $\mathbb{P}^2$ in un punto.*

Vengono poi descritte le equazioni determinantali e analizzato il caso delle curve razionali. Infine viene dimostrato come anche le superfici razionali rigate possano essere descritte da equazioni determinantali, e vengono analizzati i casi per $n = 2, 3$. L'ultimo paragrafo di questo capitolo è dedicato all'analisi dellala superficie di Veronese. Abbiamo inserito lo studio di questa superficie nel capitolo delle superfici rigate perché è l'unico esempio di superficie normale di grado $d$ in $\mathbb{P}^{d+1}$ con $d = 4$, come le superfici razionali rigate. Vengono analizzate le superfici che si ottengono dalla superficie di Veronese proiettandola da un punto appartenente o non alla superficie. Da questo studio si arriva alla superficie di Steiner.
Il quinto ed ultimo capitolo è interamente dedicato alla dimostrazione del criterio di razionalità di Castelnuovo.

**Teorema 8.** *Sia $S$ una superficie tale che $q = p_2 = 0$. Allora $S$ è razionale.*

La dimostrazione di questo teorema è basata principalmente sul seguente risultato.

**Proposizione 8.** *Sia $S$ una superficie minimale con $q = 0, p_2 = 0$. Allora esiste una curva razionale nonsingolare $C$ su $S$ tale che $C^2 \geq 0$.*

Per ultimo si dimostra che il criterio di razionalità di Castelnuovo risponde in modo affermativo al problema di Lüroth per le superfici.

**Definizione 8.** *Sia $X$ una varietà di dimensione $n$. Si dice che $X$ è* unirazionale *se esiste una applicazione razionale dominante $\varphi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow X$.*

**Corollario 3.** *Tutte le superfici unirazionali sono razionali.*