



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE MM.FF.NN.

Tesi di Laurea Specialistica in Matematica
di
Grazia Saraconi

Orbifold e Gruppi Cristallografici

Relatore
Prof. Andrea Bruno

Il candidato

Il Relatore

ANNO ACCADEMICO 2009-2010
Luglio 2010

Parole Chiave:
Gruppi Cristallografici, Geometrie localmente C_n o D_n , Orbifold
MRcode: 51K10, 57M12

Sintesi

Lo studio della simmetria porta ad una delle piu' affascinanti applicazioni della teoria dei gruppi, i Gruppi Cristallografici. A tal fine analizzeremo la simmetria delle figure piane in termini di gruppi di movimenti rigidi del piano, vale a dire in termini di isometrie.

Definizione

Un'isometria fra due spazi metrici e' una corrispondenza biunivoca fra i due spazi che preserva le distanze.

Ogni movimento rigido nel piano cartesiano o nello spazio, che non deforma in alcun modo gli oggetti e' una isometria.

Esempi di isometrie sono le traslazioni, rotazioni e riflessioni.

Definizione

Un'isometria pari del piano e' o una rotazione, cioe' una rotazione di angolo α attorno a qualche punto, o una traslazione, vale a dire un movimento parallelo del piano di vettore a .

Un'isometria dispari e' invece una glisso-riflessione, vale a dire un'isometria ottenuta da una riflessione, di retta k , seguita da una traslazione t di vettore parallelo a k . Nel caso in cui $t = \text{Id}$, si parla semplicemente di riflessione.

Osserviamo che una traslazione non lascia alcun punto fisso (a meno che il vettore a non sia il vettore nullo, ma in tal caso avrei l'applicazione identica).

Anche una glisso-riflessione, essendo composta da una traslazione, non lascia alcun punto fisso. Al contrario una rotazione lascia invariato un solo punto, il centro della rotazione, mentre una riflessione lascia fissa un'intera retta, la retta di riflessione.

Le isometrie del piano sono spesso organizzate in gruppi di simmetrie di oggetti naturali, come ad esempio i cristalli.

Proprieta' dei Cristalli:

1. I cristalli sono insiemi discreti di elementi di diversa natura che si combinano in vario modo.
2. Possiedono proprieta' ripetute nello spazio: esiste una palla B di raggio sufficientemente grande tale che per ogni punto x dello spazio esiste un punto y in B tale che tutte le proprieta' dei cristalli in x sono ripetute in y .

Dal punto di vista matematico, dato che lo spazio e' omogeneo, i punti x ed y sono caratterizzati dal fatto che esiste una simmetria F che porta x in y . La distanza $|xy|$ e' una proprieta' fisica dei cristalli ed e' preservata da F . Se denotiamo con Γ il gruppo delle simmetrie dei cristalli avremo:

1. \forall punto A dello spazio, $d(A) > 0$ e $\forall F \in \Gamma$ con $F(A) \neq A \Rightarrow |AF(A)| \geq d(A)$.
2. \exists una palla B nello spazio t.c. \forall punto x dello spazio $\exists F \in \Gamma$ t.c. $F(x)$ viene mandato in B.

Un tale gruppo Γ si dice *Cristallografico*.

Nel secondo capitolo daremo una dimostrazione algebrica del *Teorema di Classificazione dei Gruppi Cristallografici* che fu dimostrato alla fine del XIX secolo da *Fedorov* e che asserisce che esistono solo 17 Gruppi Cristallografici.

Nel terzo capitolo assoceremo ad ogni gruppo cristallografico Γ uno spazio metrico con spigoli, il cui supporto è l'insieme delle orbite dell'azione di Γ sul piano. La classificazione algebrica del secondo capitolo ci consentirà pertanto una classificazione delle geometrie localmente C_n o D_n , che si dimostrano essere tutte e sole quelle di tipo Π/Γ , con Γ cristallografico.

Nel quarto capitolo riporteremo la felice intuizione di *Conway*: le geometrie del tipo Π/Γ , con Γ cristallografico, rientrano tra le geometrie di tipo *Orbifold* e più precisamente si possono classificare come quelle la cui caratteristica orbifold è nulla.

Poiché tali geometrie si possono classificare in maniera combinatoria, otteniamo un Teorema di Classificazione dei gruppi cristallografici puramente geometrico.

In dettaglio la Tesi è così organizzata:

Nel primo capitolo richiamiamo importanti risultati nel campo topologico e analitico, che verranno utilizzati in seguito.

Nel secondo capitolo sviluppiamo la dimostrazione algebrica del *Teorema di Classificazione*.

Teorema 1.1

Ogni sottogruppo discreto di E^n e' isomorfo a Z^m con $m \leq n$, ed e' costituito da tutte le combinazioni lineari a coefficienti interi di m vettori linearmente indipendenti e_1, \dots, e_m .

Un gruppo così costituito e' chiamato *Reticolo*. Il dominio fondamentale di un reticolo puo' essere costruito completando il sistema di vettori e_1, \dots, e_m utilizzando una base e_1, \dots, e_n , così da ottenere:

$$\wp = \{\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n | 0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_n \leq 1\}.$$

Lo spazio E^n/G e' compatto se e solo se $m = n$. In questo caso il dominio fondamentale e' il parallelepipedo costituito dai vettori e_1, \dots, e_n .

Nel caso dei Gruppi Cristallografici, $n = m$ e si ha che G e' un gruppo discreto di movimenti dello spazio Euclideo E^n per il quale il gruppo quoziente

E^n/G e' compatto.

Teorema 1.2 : Restrizione Cristallografica

Dato un gruppo cristallografico G , simmetrie rotazionali di ordine superiore a 6, e di ordine 5, sono impossibili per un reticolo nel piano e nello spazio tri-dimensionale.

Definizione 1.3

Dato un Gruppo Cristallografico W ed un punto $p \in E$, il Gruppo Puntuale W_p consiste di tutte le isometrie k che fissano p e per le quali esiste una traslazione τ tale che $k\tau \in W$.

Sia Γ il sottogruppo di traslazioni per un gruppo cristallografico W , e per ogni $p_0 \in E$ sia L_{p_0} l'orbita di p_0 sotto l'azione di Γ , cioe' il reticolo definito da p_0 ; il reticolo L_{p_0} e' invariante sotto l'azione di ogni elemento del gruppo puntuale W_{p_0} .

La relazione tra il gruppo puntuale W_{p_0} e il reticolo L_{p_0} , stabilisce delle restrizioni sui gruppi puntuali ammissibili cioe' che possano essere affiancati alle 5 classi di reticoli standard.

Teorema 1.4: Classificazione dei Reticoli invarianti

I reticoli invarianti per i gruppi puntuali citati sono:

Gruppo Puntuale	Possibili Reticoli Invarianti
C_1, C_2	P <i>Tutti i reticoli</i>
D_1, D_2	R,B <i>Rettangolare o Romboidale</i>
C_4, D_4	S <i>Quadrato</i>
C_3, C_6, D_6	H <i>Esagonale</i>
D_3	H_s, H_l <i>Esagonale (due azioni)</i>

dove con C_n e D_n per $n = 1, 2, ..$ si intende:

- C_n contiene tutte le rotazioni di un n-angolo regolare;
 $C_n = \langle R_0^{2\pi/n} \rangle = \{E, R_0^\psi, R_0^{2\psi}, \dots, R_0^{(n-1)\psi}\}$ con $\psi = 2\pi/n$.
- D_n e' il gruppo generato da due riflessioni intorno agli assi l_1 e l_2 passanti per O e che formano un angolo di π/n ;
 $D_n = \langle S_{l_1}, S_{l_2} \rangle = \{E, R_0^\psi, R_0^{2\psi}, \dots, R_0^{(n-1)\psi}, S_{l_1}, S_{l_2}, \dots, S_{l_n}\}$
 con $\psi = \pi/n$.

Definizione 1.5

Diremo che un Gruppo Cristallografico W e' *Spezzato* se esiste un punto p tale che $W_p \subset W$. Il punto p e' detto *punto di spezzamento* per W .

Fissato un punto $p \in E$, un sottogruppo $K \subseteq E^2(p)$ e un sottogruppo di traslazioni Γ che sia normalizzato da K , allora l'insieme

$$G = K \cdot \Gamma = \{k\tau \mid k \in K, \tau \in \Gamma\}$$

e' un gruppo isometrico spezzato in p tale che $G_p = K$ e $\Gamma_G = \Gamma$.

Spezzamento Automatico

Gruppi Cristallografici con le seguenti coppie di gruppo puntuale/reticolo sono spezzati:

1. C_1, C_2, C_3, C_4, C_6 — con ogni reticolo invariante
2. D_1 e D_2 — con ogni reticolo invariante romboidale non quadrato
3. D_3 e D_6 — con ogni reticolo invariante

Teorema 1.6

*Fissiamo un punto $p \in E$. Dal Teorema di Classificazione dei reticoli invarianti, possiamo asserire che esistono classi di reticoli \mathcal{L} , che sono invarianti sotto l'azione di gruppi puntuali K . In particolare, ci sono **tre** possibili combinazioni. Γ sara' il gruppo di traslazione associato al particolare reticolo in classe \mathcal{L} .*

1. Fissato un punto p , sia $\{K, \mathcal{L}\}$ una coppia invariante gruppo/reticolo, con K gruppo puntuale e Γ un gruppo di traslazione associato. Allora l'insieme

$$W = W(K, \Gamma) = K \cdot \Gamma = \{k\tau \mid k \in K, \tau \in \Gamma\}$$

e' un Gruppo Cristallografico spezzato con sottogruppo di traslazione $\Gamma_W = \Gamma$ e gruppo puntuale $W_p = K$. il punto p e' un punto di spezzamento per W .

2. Definita una coniugazione mediante similitudine, i gruppi costruiti in 1) sono indipendenti dalla scelta del punto p .
3. Due Gruppi Cristallografici spezzati $W(K_1, \Gamma_1)$ e $W(K_2, \Gamma_2)$ sono coniugati mediante similitudine ϕ , se e solo se esiste una similitudine ψ , che fissa p , tale che $K_1^\psi = K_2$ e $\Gamma_1^\psi = \Gamma_2$.
4. Due Gruppi Cristallografici spezzati $W(K, \Gamma_1)$ e $W(K, \Gamma_2)$, con lo stesso gruppo puntuale K , sono coniugati mediante similitudine ϕ , se e solo se esiste una similitudine ψ , tale che $K^\psi = K$ e $\Gamma_1^\psi = \Gamma_2$.

Gruppi Cristallografici non-spezzati

Ci sono esattamente 4 classi di gruppi cristallografici non-spezzati.

1. C'e' una classe di gruppi non spezzati D_1^{ns} con gruppo puntuale D_1 . Ogni gruppo $W \in D_1^{ns}$ ha reticolo di traslazione rettangolare; ogni glissoriflessione in W ha asse di riflessione parallelo, e non e' spezzata.

2. Ci sono due classi di gruppi non spezzati, $D_2^{1,ns}$ e $D_2^{2,ns}$, con gruppo puntuale D_2 . Ogni gruppo W ha reticolo di traslazione rettangolare e tutte le glissoriflessioni in W hanno assi di riflessione paralleli ai lati del rettangolo fondamentale. Se $W \in D_2^{1,ns}$ ogni glissoriflessione in una direzione e' spezzata, mentre nessuna di quelle in ogni altra direzione e' spezzata. Se $W \in D_2^{2,ns}$, nessuna delle glissoriflessioni in entrambe le direzioni, e' spezzata.
3. C'e' una classe di gruppi non spezzati D_4^{ns} con gruppo puntuale D_4 . Ogni gruppo $W \in D_4^{ns}$ ha reticolo di traslazione quadrato, e tutte le glissoriflessioni in W hanno assi di riflessione paralleli agli altri lati o alle diagonali del quadrato fondamentale. Ogni glissoriflessione parallela alle diagonali e' spezzata; non lo sono quelle parallele ai lati.

Classificazione dei Gruppi Cristallografici

Ci sono 17 classi di gruppi Cristallografici, definite dalla relazione di equivalenza data dalla simmetria. 13 classi sono costituite da gruppi spezzati e, le restanti 4, da gruppi non spezzati.

E' inoltre interessante notare che, nessuno dei 17 gruppi cristallografici, e' isomorfo agli altri. Per dimostrarlo basta notare che, ogni 2 dei 17 gruppi ha alcune proprieta' che sono invarianti sotto l'azione di un isomorfismo ma questo e' differente in ognuno dei due gruppi. Per esempio, se un gruppo G ha un elemento g di ordine 3 (cioe' $g^3 = id$ e $g^2, g \neq id$) e il gruppo H non ha elementi di questo tipo, G e H non possono essere isomorfi.

Nel terzo capitolo, mostriamo come ad ogni gruppo cristallografico Γ sia possibile associare una geometria; tali geometrie non sono varietà differenziabili perchè hanno degli spigoli, che provengono dalle seguente asserzione:

il dominio fondamentale di C_n e' una figura con vertice in O ed angolo $2\pi/n$ (FIG 1) con punti equivalenti che sono ottenuti tramite una rotazione di $2\pi/n$. Incollando insieme i lati di questa figura lungo i punti di equivalenza otteniamo un cono con vertice in O ; questo implica che la geometria corrispondente a C_n e' una geometria sul cono.

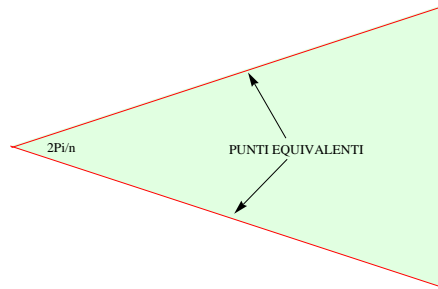


Figura 1: Dominio Fondamentale di C_n

Anche il dominio fondamentale di D_n e' una figura con vertice in O e angolo π/n , ma nessun punto della figura e' equivalente ad un altro (FIG 2);

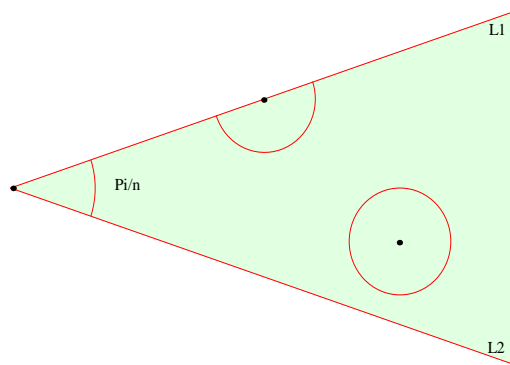


Figura 2: Dominio Fondamentale di D_n

questo significa che la geometria corrispondente a D_n e' proprio questa figura, considerata come parte del piano ed avente la distanza euclidea. Nelle geometrie D_n ci sono 3 tipi di intorni sferici dei punti: un punto che non appartiene al dominio, il vertice ed un punto interno al dominio. Ed i loro rispettivi intorni sferici: un disco, una figura di angolo π/n ed un semidisco (FIG 2).

Nella geometria C_n il vertice del cono e' un punto singolare per il quale e' scelto un piccolo intorno sferico arbitrario (non un disco); in D_n i punti singolari sono il vertice ed i punti che formano i lati.

Definizione 2.1

Una geometria e' *localmente* C_n o D_n se e' identica alla geometria standard C_n o D_n in regioni sufficientemente piccole; piu' precisamente, esiste $r > 0$ tale che per ogni punto $a \in \Sigma$ si possa trovare una geometria standard C_n

o D_n ed un punto A di questa geometria tale che, l'intorno sferico $D(a, r)$ di a possa essere sovrapposto ad un intorno sferico $D(A, r)$ nella geometria standard C_n o D_n .

Definizione 2.2

Data Σ , una geometrie localmente C_n o D_n , un *Rivestimento* e' una mappa φ da Π a Σ tale che:

- $\forall a \in \Pi$ regolare, $\exists s(a) > 0$ tale che φ definisce una sovrapposizione di un intorno sferico $D(a, s)$ di $b \in \Pi$ in un intorno sferico $D(\varphi(a), s)$ di $\varphi(a) \in \Sigma$
- $\forall x \in \Sigma \exists U$, intorno di x , tale che $\forall V \in \varphi^{-1}(U) \exists \phi : \tilde{V} \rightarrow V$ con $\tilde{V} \in \Sigma$ tale che $\varphi \circ \phi$ sia una tabella. Dove per tabella si intende $\phi_i : \tilde{U}_i \rightarrow U_i$ mappa continua tale che $\bar{\phi}_i : \tilde{U}_i/\Gamma_i \rightarrow U_i$ sia un omeomorfismo.
- φ mappa Π in tutto Σ (proprietà suriettiva); cioè $\forall x \in \Sigma \exists a \in \Pi$ tale che $\varphi(a) = x$.

Teorema 2.3

Per ogni geometria Σ localmente C_n o D_n esiste un rivestimento φ da Π a Σ .

Definizione 2.4

Dato un rivestimento, che possiamo indicare con (Π, Σ, φ) , il *Gruppo di Rivestimento* e' l'insieme Γ di tutte le isometrie F che mandano ogni punto di Π in un punto equivalente di Σ . Dimostriamo che, se Σ è localmente C_n o D_n , allora Γ è un gruppo discreto di isometrie.

Appare allora chiaro che ogni geometria compatta localmente C_n o D_n sarà del tipo Π/Γ con Γ cristallografico. Vale cioè:

Teorema 2.5

Ad ogni gruppo discreto Γ corrisponde una geometria Σ localmente C_n o D_n .

Teorema 2.6

Se Σ è una geometria localmente C_n o D_n esiste Γ , gruppo discreto, tale che Σ sia sovrapponibile a Σ_Γ , con $\Sigma_\Gamma = \Pi/\Gamma$.

Nell'ultimo capitolo riportiamo un lavoro piuttosto recente di *Conway* in cui si nota che tali oggetti geometrici rientrano nella classe degli *Orbifold* con Caratteristica di Eulero per Orbifold nulla. Tramite il *Teorema 3.4* riusciremo a dedurre una classificazione puramente geometrica dei Gruppi Cristallografici.

Definizione Orbifold 3.1

Un n -orbifold (liscio) e' uno spazio topologico metrizzabile O dotato di una collezione di 4 elementi $(U_i, \tilde{U}_i, \phi_i, \Gamma_i)$, chiamata Atlante, dove per ogni i , U_i e' un sottoinsieme aperto di O , \tilde{U}_i e' un sottoinsieme aperto di $R^{n-1} \times [0, \infty)$,

$\phi_i : \tilde{U}_i \longrightarrow U_i$ e' una mappa continua (chiamata Tabella) e Γ_i e' un gruppo finito di diffeomorfismi di \tilde{U}_i . Avremo le seguenti proprieta':

1. Gli U_i coprono O .
2. Ogni ϕ_i genera un omeomorfismo tra \tilde{U}_i/Γ_i e U_i .
3. Le Tabelle sono compatibili nel senso seguente: per ogni $x \in \tilde{U}_i$ e $y \in \tilde{U}_j$ con $\phi_i(x) = \phi_j(y)$, esiste un diffeomorfismo ψ tra un intorno V di x ed un intorno W di y tale che $\phi_j(\psi(z)) = \phi_i(z)$ per ogni $z \in V$.

Per convenienza assumeremo che la Tabella sia sempre massimale.

Da notare che questa definizione estende la definizione classica di varieta'.

Osservazione 3.2

E' importante notare che un Orbifold si ottiene dalla sfera inserendo *manici, nastri di Möbius* e bordi ed aggiungendo, infine, singularita' metriche come punti riflettori e punti conici (Teorema di classificazione per 2-varieti').

Definizione di Caratteristica di Eulero

Definiamo la cellularizzazione A_R di O come il piu' piccolo insieme del piano costituita da un numero intero k_R di domini fondamentali, contenente il disco chiuso di raggio R centrato nell'origine. Dato che A_R e' topologicamente un disco di raggio R , la sua caratteristica di Eulero e' 1 qualunque sia R .

Data questa cellularizzazione, si avranno le seguenti proprieta':

- se una faccia non contiene punti conici, appare esattamente k_R volte;
- se una faccia contiene uno ed un solo punto conico di ordine j , appare circa k_R/j volte;
- se uno spigolo non giace su uno specchio, appare circa k_R volte;
- se uno spigolo giace su uno specchio, appare circa $k_R/2$ volte;
- se un vertice non e' un punto conico e non sta su uno specchio, appare circa k_R volte;
- se un vertice e' un punto conico di ordine j , appare circa k_R/j volte;
- se un vertice sta su uno ed un solo specchio, appare circa $k_R/2$ volte;
- se un vertice e' un punto riflettore di ordine j , appare circa $k_R/(2j)$ volte;

Definiamo quindi la *Caratteristica di Eulero* come la quantita' $V-S+F$ (con V =vertici, S =spigoli, F =facce), dove agli spigoli, ai vertici e alle facce vengono dati pesi che dipendono dalle regole scritte prima.

Proposizione 3.3

Sia O_G l'orbifold ottenuto come E^2/G con G gruppo cristallografico bidimensionale. Allora $\tilde{\chi}(O_G) = 0$, qualunque sia la cellularizzazione di O_G .

Teorema 3.4

Per ogni combinazione di inserimenti, partendo dalla sfera, tale che la caratteristica $\tilde{\chi}$ sia nulla, esiste un gruppo cristallografico bidimensionale avente come orbifold tale spazio.

Inoltre, due gruppi cristallografici coniugati mediante affinita', danno orbifold uguali.

Dall'Orbifold al Gruppo Cristallografico

Abbiamo dimostrato che ogni Orbifold caratterizza un gruppo cristallografico e viceversa, ma come siamo riusciti a collegare ogni orbifold con il proprio gruppo?

Teorema 3.5

Se X e' uno spazio Topologico semplicemente connesso e G e' un gruppo che agisce in modo propriamente discontinuo su X , allora il gruppo fondamentale $\Pi_1(X/G, [x_0])$ e' isomorfo a G qualsiasi sia x_0 .

Nel nostro caso, dato che, in generale, l'azione di G non e' propriamente discontinua, dobbiamo introdurre degli 'adattamenti'. Come per la Caratteristica di Eulero, occorre effettuare delle modifiche alle nozioni topologiche classiche in modo tale che i teoremi classici valgano per tutti i gruppi cristallografici. In particolare occorre definire quali cappi di O_G corrispondono ai generatori di G ; introduciamo delle modifiche sui cappi che girano intorno a manici, nastri e punti conici o che toccano i bordi riflettori, in modo tale che $\Pi_1(X/G, [x_0])$ sia isomorfo a G . Si verifica che tali modifiche, nei casi gia' buoni, non producono nessun cambiamento.

Fissiamo un punto base $x_0 \in O_G$. Per ognuno dei punti singolari dell'Orbifold (manici, nastri di Möebius, punti conici e punti riflettori) prendiamo un cammino che circonda il punto e percorriamolo in senso antiorario.

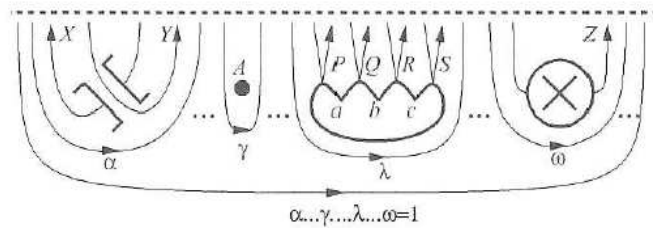


Figura 3: Generatori del Gruppo Fondamentale $\Pi_1^0(O_G)$

Punti conici

Sia γ il cappio che gira intorno al punto conico (A in figura) di ordine H, allora esso corrisponde alla rotazione γ di G tale che:

$$\gamma^H = 1$$

Manici

Sia α il cappio che gira intorno al manico (ponte in figura), presi i due cammini X ed Y , come in figura, avremo la seguente relazione:

$$X^{-1}Y^{-1}XY = [XY] = \alpha$$

Bordi e punti riflettori

Sia λ il cappio che gira intorno al bordo. Se il bordo ha n punti riflettori di ordine a, b, \dots, c , allora prendiamo $(n+1)$ cammini P, Q, R, \dots, S che toccano il bordo e sono separati tra loro dai punti riflettori. Questi corrispondono a riflessioni in G aventi le seguenti relazioni:

$$1 = P^2 = (PQ)^A = Q^2 = (QR)^B = R^2 = (RS)^C = S^2 \text{ e } \lambda^{-1}P\lambda = S$$

Nastri di Möebius

Sia ω il cappio che gira intorno al nastro (in figura e' rappresentato da un cerchio avente il bordo con i punti opposti identificati). Prendiamo un laccio denotato con Z , allora la relazione e':

$$Z^2 = \omega$$