

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica
presentata da
Giorgia Pestrin

**Arithmetic properties of
 $A + XB[X]$ domains**

Relatore

Prof.ssa Stefania Gabelli

ANNO ACCADEMICO 2007 - 2008

Maggio 2009

Classificazione AMS : 13F05, 13C20, 13B25

Parole Chiave : Arithmetic Domains, Composite Domains, Class Group

Lo studio delle proprietà aritmetiche di un dominio ha da sempre avuto un ruolo molto importante nell'ambito dell'Algebra e di tutta la matematica. Le nozioni di massimo comun divisore (MCD) e di minimo comune multiplo (mcm) per i numeri naturali risalgono a circa 2300 anni fa, quando vennero trattate nel libro VII degli Elementi di Euclide. Euclide descrisse un algoritmo per determinare il massimo comun divisore tra due numeri senza utilizzare la loro fattorizzazione. La validità della legge di annullamento del prodotto permise poi, in tempi moderni, di costruire una Teoria della Divisibilità per i domini interi del tutto simile a quella valida per i numeri interi e per i polinomi a coefficienti razionali. Ridefinendo la relazione di divisibilità tra due elementi in un dominio intero R , i domini con massimo comun divisore (domini MCD) sono stati definiti come quei domini interi nei quali esiste il massimo comun divisore per ogni coppia di elementi non nulli.

La teoria della fattorizzazione unica risale al 1800, quando Ernst Eduard Kummer (1810-1893) tentò di dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat. Egli notò che le dimostrazioni fornite precedentemente si basavano su una interessante proprietà dei numeri, nota come fattorizzazione unica, ma si accorse che non sempre era possibile fattorizzare un numero complesso in maniera unica (si pensi alla classe dei numeri algebrici). Kummer, per ovviare a questo fatto, introdusse il concetto di "numeri ideali" che furono utili per verificare l'enunciato di Fermat per un centinaio di numeri primi.

Contemporaneamente, Richard Dedekind (1831-1916) si accostò al problema della fattorizzazione in maniera completamente nuova introducendo il concetto di "ideale". Questo strumento permise di stabilire, nell'arco del XX secolo, una vera e propria teoria della fattorizzazione unica. Dedekind dimostrò che in un anello di interi algebrici un ideale si può sempre fattorizzare in modo unico come prodotto di ideali irriducibili, anche nei casi in cui fallisce il teorema di fattorizzazione unica.

La teoria degli interi algebrici suggerì inoltre l'introduzione di un gruppo

abeliano finito: il gruppo delle classi di ideali. Questo gruppo misura quanto un anello di interi algebrici si discosta dall'essere un dominio a fattorizzazione unica (UFD).

Quasi cento anni dopo venne sviluppata una teoria analoga per i domini di Krull: la teoria del gruppo delle classi dei divisori. I domini di Krull possono essere visti come una generalizzazione degli UFD e, viceversa, gli UFD possono essere caratterizzati come domini di Krull con gruppo delle classi dei divisori nullo, come dimostrò P. Samuel nel 1960 [41].

Nel 1982 [17] A. Bouvier, seguendo un'idea di M. Zafrullah, definì il gruppo delle classi di un dominio intero usando la nozione di t -invertibilità degli ideali divisoriali. Egli si pose il problema di stabilire cosa misurasse questo nuovo gruppo, ovvero cosa significasse per un dominio intero R avere gruppo delle classi nullo. Egli considerò una nuova classe di domini, chiamati domini di Prüfer v -moltiplicativi (in breve PvMDs). La classe dei PvMD è molto vasta e include i domini di Krull, i domini di Prüfer, i domini MCD e gli UFD ed è stata oggetto di numerosi studi, ad iniziare da quelli di P. Jaffard nel 1960 [32] e di M. Griffin nel 1967 [30], sebbene i primi a studiarli sistematicamente furono J. L. Mott e M. Zafrullah nel 1981 [38].

Bouvier, nel suo lavoro, dimostrò che il gruppo delle classi misura quanto un PvMD si discosta dall'essere un dominio MCD; più precisamente un dominio R è un dominio MCD se e soltanto se R è un PvMD e $\text{Cl}(R) = 0$. Dato che per un dominio di Krull questo gruppo delle classi coincide con l'usuale gruppo delle classi dei divisori, questa è una generalizzazione del teorema di Samuel.

Nel 1988 [1] D. F. Anderson studiò la teoria dei gruppi delle classi utilizzando le star-operazioni. Grazie a questo nuovo approccio, ogni dominio intero può essere studiato osservando le caratteristiche del suo \star -gruppo delle classi, facendo variare \star tra le varie star-operazioni. I risultati più significativi si ottengono per la t -operazione; infatti, come mostra il risultato di

Bouvier, le proprietà del t -gruppo delle classi $\text{Cl}(R)$ forniscono informazioni utili circa le proprietà di divisibilità del dominio intero R .

Nel corso degli anni lo studio delle proprietà aritmetiche di un dominio intero R , portò ad interessarsi allo studio di tali proprietà per gli anelli di polinomi $R[X]$ a coefficienti in R .

Ricordiamo che un dominio R soddisfa la condizione della catena ascendente sugli ideali principali (ACCP) se ogni catena di ideali principali staziona, cioè ammette un elemento massimale, e che R è detto atomico se ogni elemento non invertibile non nullo è scrivibile come prodotto di elementi irriducibili. La seguente tabella mostra alcune delle proprietà aritmetiche che passano, o meno, da R all'anello dei polinomi $R[X]$.

R UFD $\Rightarrow R[X]$ UFD
R dominio MCD $\Rightarrow R[X]$ dominio MCD
R PvMD $\Rightarrow R[X]$ PvMD
R soddisfa la ACCP $\Rightarrow R[X]$ soddisfa la ACCP
R atomico $\not\Rightarrow R[X]$ atomico

Nel 1960 in un lavoro di L. Carlitz [19] venne introdotto il concetto di dominio metà-fattoriale (HFD): questo è un dominio in cui ogni fattorizzazione di un elemento in fattori irriducibili ha la stessa lunghezza. Poichè gli HFD costituiscono una classe di domini che include gli UFD, essi hanno suscitato molto interesse nell'ambito dell'algebra commutativa. Nel suo lavoro L. Carlitz dimostrò un'elegante e concisa caratterizzazione degli HFD valida per gli anelli di interi algebrici. Dimostrò infatti che, se R è un anello di interi algebrici, allora R è un HFD se e soltanto se $|\text{Cl}(R)| \leq 2$. Tale risultato si rivelò essere uno strumento molto potente per fornire esempi di HFD che non sono UFD. Sfortunatamente, la condizione su R di essere HFD non implica che l'anello dei polinomi $R[X]$ lo sia. Nel 1980, A. Zaks [44] riuscì ad estendere

parzialmente il risultato di Carlitz ai domini di Krull. Egli dimostrò che se R è un dominio di Krull, allora $R[X]$ è un HFD se e soltanto se $|Cl(R)| \leq 2$.

Nel nostro lavoro studieremo le principali proprietà aritmetiche per una particolare classe di domini, detti *domini compositi*.

Se $A \subseteq B$ è un'estensione di domini interi, l'insieme $R := A + XB[X] = \{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in B[X] \mid a_0 \in A\}$ è un sottoanello dell'anello dei polinomi $B[X]$ chiamato il *composito di A e B* .

L'interesse per i domini compositi è dovuta principalmente a due fattori:

- (1) Forniscono esempi di anelli che in passato risultarono molto difficili da costruire;
- (2) Sono particolari costruzioni di pullbacks.

Il primo importante caso di dominio composito fu studiato nel 1978 da D. Costa, J. L. Mott and M. Zafrullah in [23] che considerarono il caso in cui B è un anello di frazioni di A , ovvero studiarono i domini del tipo $D^{(S)} := D + XD_S[X]$. Nel 1997, V. Barucci, L. Izelgue and S. Kabbaj, trovarono condizioni da dare ai domini A e B affinché il composito $A + XB[X]$ abbia certe proprietà di fattorizzazione assegnate [16].

Due anni dopo D. F. Anderson, S. El Baghdadi and S. Kabbaj, studiarono il gruppo delle classi di un dominio composito [12].

I risultati più significativi si ottengono per i domini $D^{(S)}$ e nel caso in cui $qf(A) \subseteq B$.

Per raggiungere il nostro scopo siamo partiti dal concetto di star-operazione, fino ad arrivare a definire il gruppo delle classi di un dominio. Successivamente abbiamo studiato il gruppo delle classi di un dominio composito e finalmente abbiamo determinato alcune condizioni sui domini A e B affinché il composito $A + XB[X]$ abbia le proprietà di fattorizzazione richieste.

D'ora in poi indicheremo con R un dominio intero e con K il suo campo dei

quozienti. Inoltre denoteremo con $\mathcal{F}(R)$ l'insieme degli ideali frazionari non nulli di R .

Nel primo capitolo abbiamo introdotto e studiato varie proprietà dei tre più importanti esempi di star-operazioni: la v -operazione, la t -operazione e la w -operazione.

Una star-operazione \star è un'applicazione $\mathcal{F}(R) \longrightarrow \mathcal{F}(R)$, data da $I \longmapsto I^\star$, tale che valgano le seguenti condizioni per ogni $x \in K \setminus \{0\}$ e $I, J \in \mathcal{F}(R)$:

- (1) $(xR)^\star = xR$; $(xI)^\star = xI^\star$;
- (2) $I \subseteq I^\star$ e $I \subseteq J \Rightarrow I^\star \subseteq J^\star$;
- (3) $I^{\star\star} = I^\star$.

Un ideale I in $\mathcal{F}(R)$ è detto \star -ideale se $I = I^\star$. L'esempio più semplice di star-operazione è la funzione identità, usualmente chiamata d -operazione: $I_d = I$ per ogni $I \in \mathcal{F}(R)$. Dati due ideali $I, J \in \mathcal{F}(R)$ è possibile definire due operazioni sull'insieme degli \star -ideali. La \star -moltiplicazione: $I^\star \times_\star J^\star := (I^\star J)^\star = (I^\star J^\star)^\star = (IJ)^\star$ e la \star -addizione: $I +_\star J := (I + J)^\star = (I^\star + J)^\star = (I^\star + J^\star)^\star$. L'insieme degli \star -ideali con la \star -moltiplicazione è un semigrupp unitario con unità R .

Una star-operazione è di tipo finito se, per ogni $I \in \mathcal{F}(R)$, $I^\star = \cup \{J^\star \mid J \in \mathcal{F}(R), J \text{ è finitamente generato, } J \subseteq I\}$. Ad ogni star-operazione \star è possibile associare una star-operazione di tipo finito \star_f definendo I^{\star_f} come sopra. Si dimostra inoltre che $\star_f \leq \star$ cioè che $I^{\star_f} \subseteq I^\star$ per ogni $I \in \mathcal{F}(R)$. Diremo che uno \star -ideale I è \star -finito se esiste $J \in \mathcal{F}(R)$ finitamente generato tale che $I = I^\star = J^\star$.

Un ideale \star -primo di R è un ideale primo che è anche uno \star -ideale di R mentre un ideale \star -massimale è uno \star -ideale che è massimale nell'insieme degli \star -ideali interi propri di R . Indicheremo con $\star\text{-Spec}(R)$ e $\star\text{-Max}(R)$ rispettivamente gli insiemi degli ideali \star -primi e \star -massimali di R . Grazie ad una

semplice applicazione del lemma di Zorn, è possibile dimostrare che se \star è una star-operazione di tipo finito, allora $\star\text{-Max}(R)$ è sempre diverso dall'insieme vuoto e che per ogni \star -ideale I si ha che $I = \bigcap_{M \in \star\text{-Max}(R)} IR_M$.

Successivamente abbiamo analizzato due metodi per la costruzione di star-operazioni: il primo utilizza una famiglia di sovranelli $\{R_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ di R tale che $R = \bigcap_\delta R_\delta$, il secondo usa un sottoinsieme di $\mathcal{F}(R)$ verificante alcune proprietà.

Nell'ultima parte di questo primo capitolo abbiamo costruito la v -operazione, la t -operazione e la w -operazione. La v -operazione, o chiusura divisoriale, viene definita utilizzando il secondo metodo di costruzione delle star-operazioni: per ogni $I \in \mathcal{F}(R)$, $I_v := (R : (R : I)) = \bigcap \{xR \mid x \in K \setminus \{0\}, I \subseteq xR\}$. Abbiamo inoltre osservato che per ogni star-operazione \star si ha che $\star \leq v$. I v -ideali sono anche detti ideali divisoriali.

La t -operazione è la star-operazione di tipo finito associata a v . Dunque, per ogni $I \in \mathcal{F}(R)$, $I_t = \bigcup \{J_v \mid J \subseteq I, J \text{ finitamente generato}\}$. Ne segue che la t -operazione è la più grande star-operazione di tipo finito, ovvero $\star_f \leq t$ per ogni star-operazione di tipo finito \star_f .

Abbiamo poi visto come l'ipotesi di finitezza per una star-operazione \star sia necessaria affinché $\star\text{-Max}(R)$ sia non vuoto. A tal fine abbiamo riportato un esempio di dominio integro in cui non esistono ideali v -massimali. Basta infatti considerare un dominio di valutazione con ideale massimale M . In tal caso è facile dimostrare che ogni ideale frazionario non nullo è un t -ideale e che M è un v -ideale se e soltanto se è principale. Dunque $t\text{-Max}(R) = \{M\}$ mentre $v\text{-Max}(R) = \emptyset$.

La w -operazione viene definita utilizzando il primo metodo di costruzione delle star-operazioni. Questa è la star-operazione di tipo finito associata a v definita da $I_w = \bigcap_{M \in t\text{-Max}(R)} IR_M$. La w -operazione si distribuisce sulle intersezioni cioè per ogni $I, J \in \mathcal{F}(R)$ si ha che $(I \cap J)_w = I_w \cap J_w$. Inoltre, per ogni star-operazione di tipo finito \star tale che si distribuisce sulle intersezioni,

$\star \leq w$.

Il secondo capitolo è dedicato allo studio del gruppo delle classi di un dominio integro. Partiamo dal concetto di \star -invertibilità: un ideale $I \in \mathcal{F}(R)$ è \star -invertibile se esiste $J \in \mathcal{F}(R)$ tale che $I^\star \times_\star J^\star = R$. In tal caso J^\star è unico ed è detto lo \star -inverso di I . È inoltre stato semplice dimostrare che se J^\star è lo \star -inverso di I , allora $J^\star = (R : I)$ dove $(R : I) = \{x \in K \mid xI \subseteq R\}$.

Se \star_1 e \star_2 sono due star-operazioni tali che $\star_1 \leq \star_2$, allora un ideale \star_1 -invertibile è anche \star_2 -invertibile. Dunque se un ideale è t -invertibile allora è anche v -invertibile.

Ci siamo poi soffermati a studiare alcune proprietà della t -invertibilità. In particolare il seguente risultato generalizza un teorema ben noto per la d -operazione:

Sia $I \in \mathcal{F}(R)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (1) I è t -invertibile;
- (2) I è t -finito e IR_M è invertibile per ogni $M \in t\text{-Max}(R)$;
- (3) I è t -finito e IR_M è principale per ogni $M \in t\text{-Max}(R)$.

Denotiamo con $t\text{-Inv}(R)$ il gruppo degli t -ideali t -invertibili di R e con $\text{Prin}(R)$ l'insieme degli ideali principali di R . Poichè $\text{Prin}(R) \subseteq t\text{-Inv}(R)$, possiamo definire in modo naturale il gruppo delle classi di R :

$$\text{Cl}(R) := \frac{t\text{-Inv}(R)}{\text{Prin}(R)}$$

Da questa definizione segue subito che $\text{Cl}(R) = 0$ se e soltanto se ogni t -ideale t -invertibile di R è principale. Diciamo, quindi, che $\text{Cl}(R)$ misura quanto dista R dall'avere tutti gli t -ideali t -invertibili principali.

Abbiamo dimostrato la seguente proposizione, utile per stabilire se $\text{Cl}(R) = 0$:

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (1) $\text{Cl}(R) = 0$;
- (2) Ogni $I \in t\text{-Inv}(R)$ è principale;
- (3) Se $I, J \in \mathcal{F}(R)$ sono finitamente generati e se $(IJ)_v$ è principale, allora I_v e J_v sono principali.

Abbiamo concluso il capitolo studiando quando un'inclusione di domini integrali induce un omomorfismo tra i loro gruppi delle classi:

Sia $A \subseteq B$ un'estensione di domini integrali e siano $\mathcal{T}(A)$ e $\mathcal{T}(B)$ rispettivamente l'insieme dei t -ideali di A e di B . Se $(I_t B)_t = (IB)_t$ per ogni $I \in \mathcal{F}(A)$, allora $\mu : \mathcal{T}(A) \longrightarrow \mathcal{T}(B)$, $\mu(I) = (IB)_t$, è un omomorfismo di monoidi ben definito. Inoltre μ induce un omomorfismo di gruppi $t\text{-Inv}(A) \longrightarrow t\text{-Inv}(B)$ e un omomorfismo tra i gruppi delle classi di A e B , $\text{Cl}(A) \longrightarrow \text{Cl}(B)$, dato da $\bar{I} \longmapsto \overline{(IB)_t}$.

In più, se B è un A -modulo piatto, allora è sempre possibile definire un omomorfismo $\phi : \text{Cl}(A) \longrightarrow \text{Cl}(B)$ dato da $\phi(\bar{I}) = \overline{IB}$.

Nel terzo capitolo abbiamo ridefinito alcune note classi di domini tramite la teoria degli ideali, utilizzando i concetti appena introdotti: le star-operazioni e il gruppo delle classi. Ricordiamo che le relazioni che legano le star-operazioni precedentemente incontrate: $d \leq w \leq t \leq v$. Per ognuno dei domini che abbiamo analizzato, alcune delle precedenti disuguaglianze diventano uguaglianze.

Abbiamo iniziato con l'introdurre i domini di Prüfer v -moltiplicativi, in breve PvMD. Un dominio intero R è un PvMD se l'insieme dei suoi v -ideali v -finiti è un gruppo rispetto alla v -moltiplicazione, ovvero se ogni v -ideale v -finito di

R è v -invertibile e il suo v -inverso è ancora v -finito. Possiamo caratterizzare i PvMD in tre modi diversi: utilizzando la teoria degli ideali, tramite la teoria degli anelli e infine utilizzando le star-operazioni.

La caratterizzazione basata sulla teoria degli ideali segue dalla definizione di PvMD; siano $\mathcal{F}_f(R)$ e $D_f(R)$ rispettivamente gli insiemi degli ideali fazionari non nulli finitamente generati e dei v -ideali v -finiti.

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (1) R è un PvMD;
- (2) $D_f(R) = t\text{-Inv}(R)$;
- (3) Ogni $I \in \mathcal{F}_f(R)$ è t -invertibile;
- (4) Se $I \in \mathcal{F}_f(R)$ allora $(I(R : I))_v = R$ e $(R : I)$ è v -finito.

Successivamente caratterizziamo i PvMD mediante la teoria degli anelli:

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (1) R è un PvMD;
- (2) R_P è un dominio di valutazione per ogni $P \in t\text{-Spec}(R)$;
- (3) R_M è un dominio di valutazione per ogni $M \in t\text{-Max}(R)$.

Infine la caratterizzazione dei PvMD utilizzando le star-operazioni, ci viene fornita dal seguente teorema:

R è un PvMD se e soltanto se R è integralmente chiuso e $t = w$.

Ci siamo poi occupati, dei domini di Krull, introducendo prima i domini completamente integralmente chiusi. Se indichiamo con $D(R)$ l'insieme dei v -ideali di R e con $v\text{-Inv}(R)$ l'insieme dei v -ideali v -invertibili di R , allora

diremo che un dominio intero R è completamente integralmente chiuso, in breve CIC, se $D(R)$ è un gruppo ovvero se $D(R) = v\text{-Inv}(R)$. Ricordiamo inoltre che R soddisfa la condizione della catena ascendente (ACC) sui v -ideali se ogni catena di v -ideali interi propri staziona cioè se ammette un elemento massimale. Un dominio di Krull è un dominio CIC che soddisfa la condizione della catena ascendente sui v -ideali. Per un dominio di Krull valgono le seguenti proprietà:

$$(1) D(R) = D_f(R);$$

$$(2) t = v;$$

$$(3) D(R) \text{ è un gruppo (e quindi anche } D_f(R) \text{ è un gruppo);}$$

$$(4) R \text{ è un PvMD.}$$

I domini MCD sono quei domini interi in cui esiste il massimo comun divisore per ogni coppia di elementi non entrambi nulli. E' facile dimostrare che un dominio MCD è integralmente chiuso. Il seguente risultato ci permette di ridefinire i domini MCD in termini di ideali:

R è un dominio MCD se vale una delle seguenti condizioni equivalenti per ogni $x, y \in R$:

$$(1) xR \cap yR \text{ è principale;}$$

$$(2) (xR + yR)_v \text{ è principale e in tal caso se } (xR + yR)_v = dR, \text{ allora } d = \text{MCD}(x, y).$$

Segue subito che:

R è un dominio MCD se e soltanto se I_v è principale per ogni $I \in \mathcal{F}_f(R)$.

Il seguente teorema permette di caratterizzare i domini MCD tramite il gruppo delle classi:

R è un dominio MCD se e soltanto se R è un PvMD e $\text{Cl}(R) = 0$.

Un dominio R è atomico se ogni elemento non invertibile e non nullo è scrivibile come prodotto di elementi irriducibili. Un dominio R è detto a fattorizzazione unica (UFD) se è atomico e se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

- (1) Ogni elemento irriducibile è primo;
- (2) Se $x_1 \cdots x_m$ e $y_1 \cdots y_n$ sono due fattorizzazioni in irriducibili di uno stesso elemento $r \in R \setminus \{0\}$, allora $m = n$ e esiste una permutazione $\sigma \in S_n$ tale che per ogni $i = 1, \dots, n$, y_i e $x_{\sigma(i)}$ sono associati;
- (3) R è un dominio MCD.

Quindi la classe dei domini MCD contiene la classe degli UFD. In particolare:

R è un UFD se e soltanto se R è un dominio MCD e soddisfa la condizione della catena ascendente sugli ideali principali propri interi (ACCP).

Abbiamo successivamente dimostrato che ogni dominio che soddisfa la ACCP è atomico e che un dominio atomico R è un UFD se e soltanto se per ogni coppia di elementi coprimi $a, b \in R$ si ha che $(aR + bR)_v = R$. Abbiamo infine dimostrato che un UFD è CIC e un dominio di Krull e abbiamo concluso con il seguente risultato:

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (1) R è un UFD;
- (2) R è un dominio di Krull e un dominio MCD;
- (3) R è un dominio di Krull e $D(R) = \text{Prin}(R)$;

(4) R è un dominio di Krull e $\text{Cl}(R) = 0$.

In ultimo abbiamo analizzato la classe dei domini metà-fattoriali (HFD), che sono definiti come domini atomici in cui se $x_1 \cdots x_m$ e $y_1 \cdots y_n$ sono due fattorizzazioni in irriducibili di uno stesso elemento $r \in R \setminus \{0\}$, allora $m = n$. Dalla definizione si osserva immediatamente che un UFD è anche un HFD. Abbiamo fatto vedere come tramite il gruppo delle classi si riescano a caratterizzare i domini MCD e gli UFD. In generale questo non è possibile per gli HFD, ci sono però dei casi in cui si può dare una caratterizzazione. Ad esempio se R è un anello di interi algebrici, allora abbiamo il seguente teorema, dimostrato da L. Carlitz nel 1960:

Sia R un anello di interi algebrici. Allora R è un HFD se e soltanto se $|\text{Cl}(R)| \leq 2$.

In [44], A. Zaks ci fornisce una condizione analoga per i domini di Krull:

Sia R un dominio di Krull. Se $\text{Cl}(R) \cong \mathbb{Z}_2$, allora R è un HFD.

Abbiamo concluso il capitolo dimostrando che, come gli UFD, gli HFD verificano la ACCP.

Nel quarto capitolo abbiamo introdotto i domini compositi. Abbiamo iniziato col costruire un composito R come pullback del seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
 R := A + XB[X] & \longrightarrow & A \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B[X] & \xrightarrow{\pi} & \frac{B[X]}{XB[X]} \cong B
 \end{array}$$

e abbiamo osservato che $XB[X]$ è il più grande ideale in comune tra R e $B[X]$, essendo esso il conduttore $(R : B[X])$. Inoltre R e $B[X]$ hanno lo stesso campo dei quozienti $K(X)$ dove K è il campo dei quozienti di B . Se

$A = D$ e S è un insieme moltiplicativo di D , allora $D + XD_S[X]$ è l'esempio più importante di dominio composito. In questo caso il precedente diagramma diventa:

$$\begin{array}{ccc} D + XD_S[X] & \longrightarrow & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_S[X] & \xrightarrow{\pi} & D_S \end{array}$$

Nel caso speciale in cui $S = D \setminus \{0\}$, l'anello delle frazioni D_S coincide con il campo dei quozienti di D . In questo caso $D + Xqf(D)[X]$ è il pullback del seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} D + Xqf(D)[X] & \longrightarrow & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ qf(D)[X] & \xrightarrow{\pi} & qf(D) \end{array}$$

In generale, se $F := qf(A) \subseteq B$, il diagramma può essere diviso in due parti:

$$\begin{array}{ccc} A + XB[X] & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ F + XB[X] & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ B[X] & \xrightarrow{\pi} & \frac{B[X]}{XB[X]} \cong B \end{array}$$

La teoria generale dei pullbacks ci ha permesso di studiare molte proprietà dei domini compositi.

Costruiti i domini compositi abbiamo studiato i v -ideali di $R := A + XB[X]$. Abbiamo osservato che $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$, dove $R_0 = A$ e $R_n = X^n B$ per $n \geq 1$ e abbiamo definito un ideale omogeneo I di R come un ideale generato da un insieme di elementi omogenei, cioè di elementi contenuti in uno solo degli

R_n .

Una prima caratterizzazione dei v -ideali ci viene fornita dal seguente lemma:

Sia $R = A + XB[X]$ e sia I un v -ideale (risp., t -ideale) omogeneo di R , J un ideale di B generato dai coefficienti di tutti i polinomi di I , n il più piccolo intero tra tutti gli interi k tali che $aX^k \in I$ per qualche $a \in B$ diverso da zero e sia $W \subset J$ l' A -modulo generato da tutti gli $a \in B$ tali che $aX^n \in I$. Allora J è un v -ideale (risp., t -ideale) di B e $I = X^n W + X^{n+1} J[X]$.

Abbiamo concluso questo studio sui v -ideali con il seguente teorema:

Sia $R = A + XB[X]$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (1) B è integralmente chiuso;
- (2) Per ogni v -ideale I di R , $I = u(W + XJ[X])$ per qualche $u \in K[X, X^{-1}]$, J v -ideale di B , and $W \subset J$ A -modulo non nullo.

Siamo passati così a studiare la v -invertibilità e la t -invertibilità nei domini compositi.

Sia $R = A + XB[X]$ con B integralmente chiuso. Se I è un v -ideale frazionario v -invertibile di R , allora $I = u(J_1 + XJ_2[X])$ per qualche $u \in K(X)$, J_2 v -ideale v -invertibile di B e $J_1 \subset J_2$ ideale di A non nullo.

Lo stesso risultato viene dimostrato sostituendo la v -operazione con la t -operazione.

Un ideale $I \in \mathcal{F}(R)$ è detto esteso da A se $I = uJR$ per qualche $u \in K(X)$ e qualche J ideale di A . Gli ideali divisoriali estesi di R sono in relazione con gli ideali divisoriali estesi di $B[X]$. Infatti abbiamo il seguente risultato:

Sia $R = A + XB[X]$ con B integralmente chiuso. Sia I un v -ideale frazionario v -invertibile di R . Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) I è esteso da A ;

(2) $IB[X]$ è un v -ideale di $B[X]$.

Se R è un A -modulo piatto, abbiamo dei risultati in più. Utilizzando il fatto che $R = A + XB[X]$ è un A -modulo piatto se e soltanto se B è un A -modulo piatto, siamo riusciti a far vedere che se B è un A -modulo piatto e J un ideale di A , allora abbiamo le seguenti condizioni equivalenti:

(1) J è un t -ideale t -invertibile di A ;

(2) JR è un t -ideale t -invertibile di R .

In più, se B è integralmente chiuso e I è un t -ideale frazionario t -invertibile di R , allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) $I = uJR$ per qualche $u \in K(X)$ e qualche J t -ideale t -invertibile di A ;

(2) $IB[X]$ è un v -ideale di $B[X]$.

Infine, se B è un A -modulo piatto, $B[X]$ è un R -modulo piatto se e soltanto se B è un sovranello di A . Concludiamo il capitolo studiando alcune proprietà del gruppo delle classi di un dominio composito. La prima cosa che abbiamo osservato è che se B è un A -modulo piatto, allora la mappa $\varphi : \text{Cl}(A) \rightarrow \text{Cl}(R)$, definita da $\bar{J} \mapsto \overline{JR}$, è ben definita ed è un omomorfismo iniettivo. Possiamo così dimostrare una serie di risultati molto utili in seguito.

- Se B è integralmente chiuso e $F := qf(A) \subseteq B$ allora $\text{Cl}(A + XB[X]) \cong \text{Cl}(A)$.
- Se B è integralmente chiuso e A è un campo allora $\text{Cl}(A + XB[X]) = 0$.
- Sia S un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso di A . Se A è integralmente chiuso allora $\text{Cl}(A + XA_S[X]) \cong \text{Cl}(A)$.

Nel quinto capitolo, finalmente, abbiamo raggiunto l'obiettivo di tutto il lavoro: determinare le condizioni sui domini A e B affinché il composito $A + XB[X]$ soddisfi o meno le proprietà aritmetiche considerate nel terzo capitolo.

Ricordiamo le relazioni che legano tali proprietà:

$$\begin{array}{c} \text{UFD} \Rightarrow \text{dominio MCD} \Rightarrow \text{PvMD} \\ \Downarrow \\ \text{HFD} \Rightarrow \text{ACCP} \Rightarrow \text{atomico} \end{array}$$

Abbiamo studiato soprattutto due casi: quando $qf(A) \subseteq B$ e quando B è un anello delle frazioni di A .

Iniziamo con i domini MCD e i PvMD. Il primo importante teorema ci viene fornito da D. Costa, J. L. Mott e M. Zafrullah in [23] nel caso particolare $D + XD_S[X]$.

$D + XD_S[X]$ è un dominio MCD se e soltanto se D è un dominio MCD ed esiste il massimo comun divisore tra d e X in $D + XD_S[X]$ per ogni $d \in D \setminus \{0\}$.

Segue subito che se D è un UFD allora $D + XD_S[X]$ è un dominio MCD. In generale possiamo dare due risultati fondamentali per la caratterizzazione del composito $A + XB[X]$ come PvMD e dominio MCD:

- *Se $F := qf(A) \subseteq B$ allora $A + XB[X]$ è un PvMD se e soltanto se A è un PvMD e $B = F$.*
- *Se $F := qf(A) \subseteq B$ allora $A + XB[X]$ è un dominio MCD se e soltanto se A è un dominio MCD e $B = F$.*

Successivamente, abbiamo determinato quando un dominio composito soddisfa la ACCP e mostrato alcuni risultati che caratterizzano tale do-

minio rispetto alla proprietà di essere atomico. Abbiamo dimostrato che se A è un campo allora $A + XB[X]$ soddisfa la ACCP. In particolare, se $F := qf(A) \subseteq B$, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (1) $A = F$ è un campo;
- (2) $A + XB[X]$ soddisfa la ACCP.

Abbiamo inoltre fatto vedere le seguenti implicazioni:

B soddisfa la ACCP $\Rightarrow R$ soddisfa la ACCP $\Rightarrow A$ soddisfa la ACCP.

Per quanto riguarda l'atomicità, abbiamo fatto vedere che se $F := qf(A) \subseteq B$ allora è equivalente dire che $A = F$ è un campo e che $A + XB[X]$ è atomico. Abbiamo concluso il nostro lavoro esaminando il caso in cui $A + XB[X]$ è un UFD oppure un HFD. Utilizzando il fatto che un dominio composito è un pullback, è stato possibile dimostrare che $A + XB[X]$ è CIC se e soltanto se $A = B$ e B è CIC. Poichè un UFD è CIC, allora $A + XB[X]$ è UFD se e soltanto se $A = B$ e B è un UFD. E' quindi naturale chiedersi quando un dominio composito è un HFD.

Un primo risultato ci viene dato dal seguente teorema:

Sia $R = F + XB[X]$ con F campo e B un UFD. Allora R è un HFD.

Un corollario è il seguente risultato:

Sia $F := qf(A) \subseteq B$ e sia B un UFD. Allora $R = A + XB[X]$ è un HFD se e soltanto se $A = F$ è un campo.

Possiamo allora chiederci: il precedente teorema è ancora valido se sostituiamo l'ipotesi " B UFD" con " $B[X]$ HFD"?

La risposta è positiva:

Sia $R = F + XB[X]$ con $F \subseteq B$ campo e sia $B[X]$ un HFD. Allora R è un HFD.

Possiamo allora estendere il risultato ad un dominio composto del tipo $A + XB[X]$:

Sia $F := qf(A) \subseteq B$ e sia $B[X]$ un HFD. Allora $R := A + XB[X]$ è un HFD se e soltanto se $A = F$ è un campo.

Infine abbiamo concluso lo studio con un'ultima caratterizzazione:

Sia $F \subseteq B$ un campo e sia B un dominio. Allora $F + XB[X]$ è un HFD se e soltanto se B è integralmente chiuso.

Riassumiamo, così come abbiamo fatto per gli anelli di polinomi, i risultati illustrati nella tesi nel caso in cui $R := A + XB[X]$ e $F := qf(A) \subseteq B$.

$A = B$ CIC $\Leftrightarrow R$ UFD
A dominio MCD e $B = F \Leftrightarrow R$ dominio MCD
A PvMD e $B = F \Leftrightarrow R$ PvMD
$A = F$ campo $\Leftrightarrow R$ soddisfa la ACCP
$A = F$ campo $\Leftrightarrow R$ atomico
B UFD e $A = F$ campo $\Leftrightarrow R$ HFD
$B[X]$ HFD e $A = F$ campo $\Leftrightarrow R$ HFD
B integralmente chiuso e $A = F$ campo $\Leftrightarrow R$ HFD

Bibliography

- [1] Anderson, David F. *A general theory of class groups*. Comm. Algebra 16 (1988), no. 4, 805–847.
- [2] Anderson, D. D. *Star-operations induced by overrings*. Comm. Algebra 16 (1988), no. 12, 2535–2553.
- [3] Anderson, D. D.; Anderson, D. F. *Generalized GCD domains*. Comment. Math. Univ. St. Paul. 28 (1980), no. 2, 215–221.
- [4] Anderson, D. D.; Anderson, David F. *Divisorial ideals and invertible ideals in a graded integral domain*. J. Algebra 76 (1982), no. 2, 549–569.
- [5] Anderson, D. D.; Anderson, David F. *Elasticity of factorizations in integral domains*. J. Pure Appl. Algebra 80 (1992), no. 3, 217–235.
- [6] Anderson, D. D.; Anderson, David F.; Zafrullah, Muhammad. *Factorization in integral domains*. J. Pure Appl. Algebra 69 (1990), no. 1, 1–19.
- [7] Anderson, D. D.; Anderson, David F.; Zafrullah, Muhammad. *Rings between $D[X]$ and $K[X]$* . Houston J. Math. 17 (1991), no. 1, 109–129.

- [8] Anderson, D. D.; Anderson, David F.; Zafrullah, Muhammad. *The $D+XD_s[X]$ -construction and t -splitting sets*. Commutative Algebra, Arab. J. Sci. Eng. Sect C theme Issue 26 (2001), 3–16.
- [9] Anderson, David F.; Chapman, Scott T.; Smith, William W. *OVERRINGS OF HALF-FACTORIAL DOMAINS*. Canad. Math. Bull. 37 (1994), no. 4, 437–442.
- [10] Anderson, David F.; El Abidine, Driss Nour. *The $A + XB[X]$ and $A + XB[[X]]$ constructions from GCD-domains*. J. Pure Appl. Algebra 159 (2001), no. 1, 15–24.
- [11] Anderson, David F.; El Baghdadi, Said; Kabbaj, Salah-Eddine. *The homogeneous class group of $A + XB[X]$ domains*. Commutative rings, 167–181, Nova Sci. Publ., Hauppauge, NY, 2002.
- [12] Anderson, David F.; El Baghdadi, Said; Kabbaj, Salah-Eddine. *On the class group of $A + XB[X]$ domains*. Advances in commutative ring theory (Fez, 1997), 73–85, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 205, Dekker, New York, 1999.
- [13] Anderson, David; Fontana, Marco; Zafrullah, Muhammad. *Some remarks on Prüfer \star -multiplication domains and class groups*. J. Algebra 319 (2008), no. 1, 272–295.
- [14] Anderson, David F.; Ryckaert, Alain. *The class group of $D+M$* . J. Pure Appl. Algebra 52 (1988), no. 3, 199–212.
- [15] Atiyah, M. F.; Macdonald, I. G. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 1969.
- [16] Barucci, Valentina; Izelgue, Lahoucine; Kabbaj, Salah-Eddine. *Some factorization properties of $A + XB[X]$ domains*. Commu-

tative ring theory (Fès, 1995), 69–78, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 185, Dekker, New York, 1997.

- [17] Alain Bouvier. *Le groupe de classes d'un anneau int gr .* 107 Congrès national des Société savantes, Bressi, sciences. fasc. IV, (1982) pages 85–92.
- [18] Bouvier, Alain; Zafrullah, Muhammad. *On some class groups of an integral domain.* Bull. Soc. Math. Gr ce (N.S.) 29 (1988), 45–59.
- [19] Carlitz, L. *A characterization of algebraic number fields with class number two.* Proc. Amer. Math. Soc. 11 1960 391–392.
- [20] Coykendall, Jim. *Extensions of half-factorial domains: a survey.* Arithmetical properties of commutative rings and monoids, 46–70, Lect. Notes Pure Appl. Math., 241, Chapman Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2005.
- [21] Coykendall, Jim; Dumitrescu, Tiberiu; Zafrullah, Muhammad. *The half-factorial property and domains of the form $A + XB[X]$.* Houston J. Math. 32 (2006), no. 1, 33–46.
- [22] Costa, D.; Mott, J.; Zafrullah, M. *Overrings and dimensions of general $D + M$ constructions.* J. Natur. Sci. Math. 26 (1986), no. 2, 7–13.
- [23] Costa, Douglas; Mott, Joe L.; Zafrullah, Muhammad. *The construction $D + XD_s[X]$.* J. Algebra 53 (1978), no. 2, 423–439.
- [24] Fontana, Marco; Gabelli, Stefania. *On the class group and the local class group of a pullback.* J. Algebra 181 (1996), no. 3, 803–835.

- [25] Fossum, Robert M. *The divisor class group of a Krull domain*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 74. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.
- [26] Gabelli, Stefania. *On divisorial ideals in polynomial rings over Mori domains*. Comm. Algebra 15 (1987), no. 11, 2349–2370.
- [27] Gabelli, Stefania. *Completely integrally closed domains and t -ideals*. Boll. Un. Mat. Ital. B (7) 3 (1989), no. 2, 327–342.
- [28] Gilmer, Robert. *Multiplicative ideal theory*. Pure and Applied Mathematics, No. 12. Marcel Dekker, Inc., New York, 1972.
- [29] Grams, Anne. *Atomic rings and the ascending chain condition for principal ideals*. Proc. Cambridge Philos. Soc. 75 (1974), 321–329.
- [30] Griffin, Malcolm. *Some results on v -multiplication rings*. Canad. J. Math. 19 1967 710–722.
- [31] Houston, Evan; Taylor, John. *Arithmetic properties in pullbacks*. J. Algebra 310 (2007), no. 1, 235–260.
- [32] Paul Jaffard. *Les systèmes d'idéaux*. Travaux et Recherches Mathématiques, IV. Dunod, Paris, 1960.
- [33] Kaplansky, Irving. *Commutative rings*. Revised edition. The University of Chicago Press, Chicago, Ill.-London, 1974.
- [34] Khalis, Mohammed; Nour El Abidine, Driss. *On the class group of a pullback*. Commutative ring theory (Fès, 1995), 377–386, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 185, Dekker, New York, 1997.

- [35] Kim, Hwankoo. *Examples of half-factorial domains*. *Canad. Math. Bull.* 43 (2000), no. 3, 362–367.
- [36] Krull, Wolfgang. *Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche*. *Math. Z.* 41 (1936), no. 1, 545–577.
- [37] McAdam, Stephen. *Unique factorization of monic polynomials*. *Comm. Algebra* 29 (2001), no. 10, 4341–4343.
- [38] Mott, Joe L.; Zafrullah, Muhammad. *On Prüfer v -multiplication domains*. *Manuscripta Math.* 35 (1981), no. 1-2, 1–26.
- [39] Nagata, Masayoshi. *A remark on the unique factorization theorem*. *J. Math. Soc. Japan* 9 (1957), 143–145.
- [40] Roitman, Moshe. *Polynomial extensions of atomic domains*. *J. Pure Appl. Algebra* 87 (1993), no. 2, 187–199.
- [41] Samuel, P. *Lectures on unique factorization domains*. Notes by M. Pavman Murthy. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics, No. 30 Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1964.
- [42] Sheldon, Philip B. *Prime ideals in GCD-domains*. *Canad. J. Math.* 26 (1974), 98–107.
- [43] Querré, Julien. *Idéaux divisoriels d'un anneau de polynômes*. *J. Algebra* 64 (1980), no. 1, 270–284.
- [44] Zaks, Abraham. *Half-factorial-domains*. *Israel J. Math.* 37 (1980), no. 4, 281–302.
- [45] Zafrullah, Muhammad. *On finite conductor domains*. *Manuscripta Math.* 24 (1978), no. 2, 191–204.

- [46] Zafrullah, Muhammad. *The $D + XD_S[X]$ construction from GCD-domains*. J. Pure Appl. Algebra 50 (1988), no. 1, 93–107.
- [47] Zafrullah, Muhammad. *Various facets of rings between $D[X]$ and $K[X]$* . Comm. Algebra 31 (2003), no. 5, 2497–2540.