UNIVERSITÀ DEGLI STUDI “ROMA TRE”
FACOLTÀ DI S.M.F.N.

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica
di

Arianna Pelliccia

Stime di martingala dei parametri nel modello CIR, con applicazioni allo studio del mercato obbligazionario italiano

Relatori

Prof. Massimo Bernaschi | Prof.ssa Lucia Caramellino

ANNO ACCADEMICO 2001 - 2002

Classificazione AMS: 62M05, 90A09;

Parole chiave: Modelli diffusivi per la Finanza, Funzioni-martingala di stima, Calibrazione dei parametri;

Sintesi

Il lavoro svolto, si inserisce nell'ambito di un più ampio progetto in fase di realizzazione presso l'Istituto per le Applicazioni del Calcolo (I.A.C.) del C.N.R., su commissione del Ministero del Tesoro. L'obiettivo è quello di sviluppare un modello per l'emissione ottimale di titoli di debito pubblico. Per fare ciò è fondamentale individuare un modello matematico in grado di descrivere, in maniera sufficientemente attendibile, le dinamiche del mercato obbligazionario italiano.

In letteratura sono riportati molteplici tentativi di costruzione di modelli per descrivere la struttura a scadenza dei rendimenti dei titoli a reddito fisso. A titolo di esempio, citiamo brevemente le esperienze negative della Merrill Lynch, nel 1970, e della banca di Tokio Mitsubishi, nel 1997, che forniscono elementi significativi per valutare l'impatto di tale problematica sul mercato finanziario. Nel primo caso, è stata effettuata una operazione di *stripping*[1] impiegando un errato modello per la struttura a scadenza dei rendimenti, prezzando di conseguenza in maniera non corretta i titoli negoziati sul mercato. Al momento dell'emissione, gli operatori più attenti hanno messo in atto massicce operazioni di arbitraggio che hanno causato perdite istantanee per 70 milioni di dollari. Nel secondo, a seguito di un errore sistematico nel prezzaggio dovuto all'impiego scorretto di un particolare modello, sono stati annullati, con conseguenti perdite monetarie oltre che di immagine, contratti *swap* e *swaptions*[2] per un ammontare di 83 milioni di dollari. Alla luce di

[1] Operazione di divisione di un titolo dalla sua cedola in attività finanziarie distinte per consentire la loro trattazione disgiunta.

[2] Operazione finanziaria in cui le controparti si scambiano strumenti finanziari definendo, nello stesso momento, l'operazione inversa ad una data stabilita.

tali esperienze è facile immaginare l'importanza di individuare un modello di *pricing* attendibile.

Il primo passo nel processo di costruzione di un modello di *pricing* è la caratterizzazione dell'ambiente nel quale si intende operare. Le tre ipotesi fondamentali sul funzionamento dei mercati, qui assunte, sono quelle (classiche) di **non frizionalità**, di **competitività** e di **assenza di arbitraggio**[3]. È chiaro che se l'insieme di ipotesi di base genera un mondo molto lontano da quello reale, il modello relativo è di scarsa utilità se non addirittura dannoso. Stabilite le basi del modello occorre poi identificare i fattori che guidano l'evoluzione dei tassi.

Nel nostro caso, è stato adottato un modello ad un solo fattore, ovvero l'evoluzione del tasso di interesse istantaneo dipende da un'unica fonte di rischio, qui un moto Browniano (entreremo tra breve nel dettaglio del modello)[4]. Il vantaggio più evidente dei modelli ad un solo fattore è la semplicità di interpretazione ed implementazione.
Una volta che si è stabilito il numero dei fattori è necessario specificare la natura della dinamica. Per descrivere il comportamento del tasso istantaneo di interesse abbiamo considerato un modello diffusivo. Questo tipo di modello assume che le variazioni dei tassi avvengano in modo continuo, permettendo l'utilizzo di un apparato matematico potente già disponibile quale quello del calcolo stocastico.

Detto ciò possiamo finalmente introdurre il modello che è stato analizzato in questa tesi: il modello di Cox, Ingersoll e Ross, detto **modello CIR**.

Nel 1985, Cox, Ingersoll e Ross suggerirono di modellizzare il comportamento del tasso d'interesse istantaneo come la soluzione della seguente equazione differenziale stocastica:

$$dX_t = (a + bX_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t, \quad X_0 = x_0 > 0 \tag{1}$$

[3]Definite nel Capitolo 2.

[4]Per completezza, aggiungiamo che i modelli a più fattori presuppongono più fonti di incertezza, un esempio è dato dai modelli cosiddetti *a volatilità stocastica*.

dove a, b, σ sono parametri reali verificanti i vincoli: $a \geq 0$ e $\sigma > 0$.

Dal punto di vista puramente matematico, si tratta di un modello non banale perché il coefficiente di diffusione è Hölderiano e non Lipschitziano, ciò significa che i risultati classici di esistenza ed unicità della soluzione qui non si possono applicare direttamente. Comunque, il modello CIR è stato ampiamente studiato in letteratura (si veda ad esempio il recente Lamberton e Lapeyre [24] per un'analisi dettagliata). In particolare, si può facilmente determinare un'espressione esplicita della media e della varianza ad un tempo:

$$\mathbf{E}\,(X_t) = x_0 e^{b\,t} + \frac{a}{b}(e^{b\,t} - 1)$$

e

$$Var\,(X_t) = \frac{\sigma^2}{2b^2}\Big[(a + 2bx_0)e^{2b\,t} - 2(a + bx_0)e^{b\,t} + a\Big].$$

Va infine detto che anche la densità di transizione è qui perfettamente individuata ed è data da una legge di tipo chi-quadro non centrata.

L'ultimo passo del processo di definizione di un modello consiste nella stima dei parametri. Una volta che i fattori chiave sono stati individuati e che la loro dinamica è stata specificata, i parametri del modello devono essere stimati a partire da un insieme di dati rappresentativi di ciò che si intende modellizzare.

Questa tesi si occupa fondamentalmente di questo aspetto: assunto il modello CIR come il modello evolutivo del tasso di interesse istantaneo, lo scopo è quello di stimare i parametri a, b, σ presenti nell'equazione (1).

Ovviamente siamo partiti da osservazioni reali del tasso di interesse, riferite al periodo che va dal 26/8/98 al 21/11/00, provenienti dal mercato obbligazionario italiano. I dati utilizzati per questo studio sono stati estratti dal database di *Datastream*[5], il quale pur rimanendo il migliore in circolazione, presenta purtroppo anche errori grossolani nella determinazione dei prezzi e registra la presenza di titoli indicizzati o di titoli illiquidi.

Per la valutazione della struttura a termine, fra i molteplici metodi numerici, individuati in letteratura, si è optato per l'utilizzo del metodo di

[5] Società del gruppo Thomson Financial, che si occupa di consulenza finanziaria.

Nelson[6]. Tale scelta è il risultato di un'analisi sia qualitativa sia quantitativa che ha permesso di individuare caratteristiche peculiari del metodo, quali, ad esempio, la capacità di fornire una forma predefinita della struttura a termine in accordo con i dati sperimentali. Applicando questo metodo si è riusciti a ricavare una serie storica che è stata utilizzata nel corso del lavoro.

Tipicamente, la stima dei parametri può essere effettuata utilizzando il metodo classico della massima verosimiglianza, che consiste nella determinazione dei parametri che rendono massima la funzione di verosimiglianza calcolata nelle osservazioni effettuate. Questo metodo, nella versione appena descritta, presuppone la conoscenza della densità di transizione relativa al modello di base, che in generale non è nota. Ma nel caso del modello CIR la densità di transizione è calcolabile, come abbiamo già osservato. Tuttavia è difficilmente trattabile perché, essendo una legge chi-quadro non centrata, si scrive in termini di funzioni speciali. In altre parole, in pratica, è difficile da valutare numericamente, quindi non si riescono ad ottenere stime efficienti utilizzando tecniche standard.

Per ovviare a queste difficoltà sono state proposte in letteratura diverse tecniche. Recenti esempi sono dati da: Ait-Sahalia (1996)[1] che approssima la densità di transizione con una densità non parametrica, la quale si allinea asintoticamente verso la vera densità; Christensen, Poulsen e Sørensen (2001)[9], che presentano un metodo numerico per risolvere l'equazione differenziale associata alla funzione di verosimiglianza; Elerian, Chib e Shephard (2001)[11] e Eraker (2001)[12], che adottano una metodologia Bayesiana. Tutti questi metodi approssimano in qualche modo la densità vera ma le proprietà delle stime sono sconosciute. Inoltre, sono spesso intensivi dal punto di vista computazionale o addirittura proibitivi. Un altro approccio è stato introdotto da Duffie e Singleton(1993)[10] i quali hanno sviluppato una versione del metodo dei momenti dove quest'ultimi sono calcolati con delle simulazioni. Questo approccio viene spesso usato quando i momenti sono

[6]Tale modello fa parte dei cosidetti *modelli parsimoniosi.* L'idea di base di questa classe di modelli, è quella di imporre a priori alcune proprietà della funzione di sconto e contemporaneamente di limitare il numero dei parametri che determinano la forma funzionale.

difficili da calcolare, ma le sue proprietà di efficienza non sono ancora chiare. Infine Gentile e Renò (2002) [13] hanno recentemente proposto un metodo dei momenti che possiede una piena efficienza, da qui il nome di *metodo efficiente dei momenti*, ma anche in questo caso il metodo risulta, almeno ad un primo studio, troppo pesante a livello computazionale.

In questa tesi è stato utilizzato un metodo che si adatta facilmente al modello CIR e che ha dato buoni risultati, ma che può essere facilmente applicato a tutti quei modelli dove non si riesce a calcolare o ad usare la densità di transizione. Il metodo in questione prevede la costruzione di una funzione di stima che verifichi anche opportune proprietà di martingala, come sviluppato in anni recenti da Bibby, Sørensen *et al.*. È interessante osservare che questi metodi, a differenza di molti altri, consentono di determinare utili proprietà asintotiche degli stimatori, che a loro volta non rimangono solo teorici e che anzi, a prezzo magari di una qualche forma di approssimazione, si riescono a scrivere in modo esplicito. Vediamo come nascono e funzionano questi metodi.

Consideriamo un generico processo di diffusione X che risolva la seguente equazione differenziale stocastica

$$dX_t = b(X_t, \theta)dt + \sigma(X_t, \theta)dW_t,\ X_0 = x_0,\ t \geq 0. \tag{2}$$

La quantità θ denota un *parametro incognito*, appartenente ad un opportuno sottoinsieme Θ di $\mathbb{R}^d$, che si vuole stimare a partire da osservazioni discrete equidistanti di $\{X_t\}_{t\geq 0}$ su un prefissato intervallo temporale $[0, T]$: $X_0, X_\Delta, X_{2\Delta}, \ldots, X_{n\Delta}$ (con $n\Delta = T$).

Se σ non dipende da θ, nell'ipotesi cioè che $\sigma(x, \theta) = \sigma(x)$, e se sono soddisfatte opportune condizioni di regolarità, le misure corrispondenti alle osservazioni continue della soluzione della (2) per valori differenti di θ sono equivalenti. In tal caso, è possibile scrivere la funzione di log-verosimiglianza, ovvero il logaritmo della derivata di Radon-Nicodym, per tempi continui senza utilizzare la densità di transizione del processo. In particolare, la funzione di log-verosimiglianza della legge della soluzione X della (2), con $\sigma(x, \theta) = \sigma(x)$, rispetto alla legge indotta dal processo soluzione dell'equazione differenziale stocastica (di riferimento)[7]

$$dY_t = \sigma(Y_t)dW_t,\ Y_0 = x_0,\ t \geq 0,$$

è data da:

$$l_T(\theta) = \ln L_T(\theta) = \int_0^T \frac{b(X_s;\theta)}{\sigma^2(X_s)}dX_s - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{b^2(X_s;\theta)}{\sigma^2(X_s)}ds. \tag{3}$$

Le osservazioni $X_0, X_\Delta, X_{2\Delta}, \ldots, X_{n\Delta}$ possono essere utilizzate per avere un'approssimazione della log-verosimiglianza $l_T(\theta)$: facendo uso delle somme di Itô e di Riemann per approssimare gli integrali presenti nella (3), si ottiene:

$$l_T(\theta) \simeq \tilde{l}_n(\theta) = \sum_{i=1}^n \frac{b(X_{(i-1)\Delta};\theta)}{\sigma^2(X_{(i-1)\Delta})}(X_{i\Delta} - X_{(i-1)\Delta}) - \frac{\Delta}{2}\sum_{i=1}^n \frac{b^2(X_{(i-1)\Delta};\theta)}{\sigma^2(X_{(i-1)\Delta})}.$$

Un modo per stimare θ è quello di determinare un valore di θ che rende massima la log-verosimiglianza sopra scritta. Derivando rispetto a θ e indicando con $\dot{b}(x,\theta)$ il gradiente di b rispetto a θ, si ha

$$\dot{\tilde{l}}_n(\theta) = \sum_{i=1}^n \frac{\dot{b}(X_{(i-1)\Delta};\theta)}{\sigma^2(X_{(i-1)\Delta})}(X_{i\Delta} - X_{(i-1)\Delta}) - \Delta\sum_{i=1}^n \frac{b(X_{(i-1)\Delta};\theta)\dot{b}(X_{(i-1)\Delta};\theta)}{\sigma^2(X_{(i-1)\Delta})}.$$

La stima $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}(X_0, X_\Delta, \ldots, X_{n\Delta})$ è quindi data dalla soluzione dell'equazione

$$\dot{\tilde{l}}_n(\theta) = 0.$$

La funzione $\dot{\tilde{l}}_n(\theta)$ è detta una **funzione di stima**. In generale, una funzione di stima è una funzione che dipende dal parametro incognito θ e dalle osservazioni $X_0, X_\Delta, \ldots, X_{n\Delta}$, chiamiamola ad esempio $G_n(\theta; X_0, X_\Delta, \ldots, X_{n\Delta})$, tale che una soluzione in θ dell'equazione

$$G_n(\theta; X_0, X_\Delta, \ldots, X_{n\Delta}) = 0$$

dia uno **stimatore** per θ. Inoltre, una funzione di stima G_n è detta **non distorta** se

$$\mathbf{E}(G_n(\theta; X_0, X_\Delta, \ldots, X_{n\Delta})) = 0.$$

[7]Tornando al modello CIR, osserviamo che, nell'ipotesi di conoscere la volatilità σ, il set di parametri sarebbe dato da $\theta = (a, b)$. Ora, in tal caso il processo Y sarebbe ancora un CIR ma con la scelta del parametro $\theta = 0$.

Abbiamo quindi visto che la funzione $\dot{\tilde{l}}_n(\theta)$ è una funzione di stima quando $\sigma(x,\theta) = \sigma(x)$, quando cioè il coefficiente di diffusione non dipende dal parametro incognito θ. Se σ dipende da θ, come nel caso del modello CIR, in cui θ è dato dalla terna (a, b, σ), si usa solitamente la stessa funzione di stima, come suggerito da Göing-Jaeschke [16], quindi si considera

$$\dot{\tilde{l}}_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\dot{b}(X_{(i-1)\Delta};\theta)}{\sigma^2(X_{(i-1)\Delta};\theta)}(X_{i\Delta} - X_{(i-1)\Delta}) - \Delta \sum_{i=1}^{n} \frac{b(X_{(i-1)\Delta};\theta)\dot{b}(X_{(i-1)\Delta};\theta)}{\sigma^2(X_{(i-1)\Delta};\theta)}. \tag{4}$$

Questa funzione di stima è distorta, come osservato ad esempio da Barndorff-Nielsen e Sørensen [3].

L'idea è allora quella di modificare la (4) sottraendole il suo compensatore, in modo da ottenere una martingala con media nulla rispetto alla filtrazione definita da $\mathcal{F}_i = \sigma(X_\Delta, \ldots, X_{i\Delta}), i = 1, 2, \ldots, n$. È possibile verificare che, detto $C_n(\theta)$ il compensatore di $\dot{\tilde{l}}_n(\theta)$, la funzione-martingala di stima in questione è data da:

$$\widetilde{G}_n(\theta) \stackrel{def}{=} \dot{\tilde{l}}_n(\theta) - C_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\dot{b}(X_{(i-1)\Delta};\theta)}{\sigma^2(X_{(i-1)\Delta};\theta)}(X_{i\Delta} - F(X_{(i-1)\Delta};\theta)), \tag{5}$$

dove si è posto

$$F(X_{(i-1)\Delta};\theta) = \mathbf{E}_\theta(X_{i\Delta} \mid X_{(i-1)\Delta}). \tag{6}$$

Ricapitolando, usando la tecnica classica della log-verosimiglianza è stata costruita la funzione-martingala di stima $\widetilde{G}_n(\theta)$, ottenendo di conseguenza uno stimatore $\widetilde{\theta}_n$ per θ dato dalla soluzione dell'equazione

$$\widetilde{G}_n(\theta) = 0.$$

In realtà, si può procedere in modo più generale, come riportato da Bibby e Sørensen (1995) [6]. Si consideri al posto di $\widetilde{G}_n(\theta)$ una generica funzione-martingala di stima $G_n(\theta)$ della forma

$$G_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} g_{i-1}(\theta)(X_{i\Delta} - F(X_{(i-1)\Delta};\theta)),$$

dove F è definita in (6). Perché sia una martingala a media nulla basta richiedere che i coefficienti $g_{i-1}(\theta)$ siano $\mathcal{F}_{i-1}$-misurabili, per ogni i. Indichiamo con $\mathcal{G}$ la classe formata da tali funzioni-martingala di stima. Ovviamente, $\widetilde{G}_n(\theta) \in \mathcal{G}$. Ora, usando un opportuno criterio di ottimalità (ampiamente descritto nel Paragrafo 4.3), che tiene conto del comportamento asintotico di G_n, o più propriamente di un Teorema del Limite Centrale per martingale, Bibby e Sørensen riescono a determinare la migliore funzione-martingala di stima G_n^* all'interno della classe $\mathcal{G}$, data da:

$$G_n^*(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\dot{F}(X_{(i-1)\Delta};\theta)}{\phi(X_{(i-1)\Delta};\theta)}(X_{i\Delta} - F(X_{(i-1)\Delta};\theta)), \tag{7}$$

dove $\dot{F}(X_{(i-1)\Delta};\theta)$ denota il gradiente (rispetto a θ) della funzione definita in (6) e ϕ è la varianza condizionata nel generico intervallo:

$$\phi(X_{(i-1)\Delta};\theta) = \mathbf{E}_\theta\Big((X_{i\Delta} - F(X_{(i-1)\Delta};\theta))^2 \mid X_{(i-1)\Delta}\Big). \tag{8}$$

È interessante osservare che le due funzioni di stima fin qui citate, $\widetilde{G}_n(\theta)$ e $G_n^*(\theta)$, sono diverse tra loro. Tuttavia, usando un'opportuna approssimazione al primo ordine delle quantità $\dot{F}$ e ϕ, $\widetilde{G}_n(\theta)$ si può considerare come un'approssimazione della funzione-martingala di stima ottimale $G_n^*(\theta)$.

Dal punto di vista pratico, purtroppo l'utilizzo della funzione ottimale $G_n^*(\theta)$ richiede un maggiore sforzo computazionale per il calcolo del conseguente stimatore (ottimale) θ_n^*. Tuttavia, usando l'approssimazione sopra citata di $G_n^*(\theta)$ in $\widetilde{G}_n(\theta)$, Bibby e Sørensen [6] hanno dimostrato che l'utilizzo del parametro $\tilde{\theta}_n$ ottenuto da $\widetilde{G}_n(\theta)$ implica solo una minima perdita di efficienza rispetto al parametro ottimale θ_n^*.

Per tali ragioni, nel contesto sviluppato in questa tesi, ovvero nel contesto del modello CIR, si è deciso di usare la funzione di stima $\widetilde{G}_n(\theta)$. In tal modo, è stato possibile determinare lo stimatore $\tilde{\theta}_n = (\tilde{a}_n, \tilde{b}_n)$ di $\theta = (a, b)$ ottenendo le seguenti espressioni:

$$\tilde{a}_n = \frac{\tilde{b}_n}{1 - e^{\tilde{b}_n \Delta}} \frac{n e^{\tilde{b}_n \Delta} - \sum_{i=1}^{n} \frac{X_{i\Delta}}{X_{(i-1)\Delta}}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{(i-1)\Delta}}}, \tag{9}$$

dove

$$\tilde{b}_n = \frac{1}{\Delta} \ln \left[\frac{n \sum_{i=1}^{n} \frac{X_{i\Delta}}{X_{(i-1)\Delta}} - \sum_{i=1}^{n} X_{i\Delta} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{(i-1)\Delta}}}{n^2 - \sum_{i=1}^{n} X_{(i-1)\Delta} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{(i-1)\Delta}}} \right]. \tag{10}$$

Osserviamo che nelle precedenti uguaglianze manca uno stimatore per la volatilità σ: in effetti, ciò che accade è che nelle equazioni ottenute si perde la dipendenza da σ. Per stimare la volatilità σ, abbiamo seguito la procedura sviluppata da Göing-Jaeschke [16].

Abbiamo considerato una funzione-martingala di stima generata da un momento (condizionato) di ordine maggiore:

$$H_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} h(X_{(i-1)\Delta}; \theta)[(X_{i\Delta} - F(X_{(i-1)\Delta}; \theta))^2 - \phi(X_{(i-1)\Delta}; \theta)]. \tag{11}$$

Osserviamo che questa espressione per la funzione di stima tiene conto del comportamento della varianza dei dati.

Sviluppando un procedimento analogo a quello brevemente descritto in precedenza, in particolare tenendo ancora conto di un opportuno criterio di ottimalità e di opportune approssimazioni, abbiamo determinato il seguente stimatore per σ:

$$\tilde{\sigma}_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[X_{i\Delta} - \frac{1}{\tilde{b}_n} \left((\tilde{a}_n + \tilde{b}_n X_{(i-1)\Delta}) e^{\Delta \tilde{b}_n} \right) \right]^2 \frac{1}{X_{(i-1)\Delta}}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{(\tilde{a}_n + 2\tilde{b}_n X_{(i-1)\Delta}) e^{2\Delta \tilde{b}_n} - 2(\tilde{a}_n + \tilde{b}_n X_{(i-1)\Delta}) e^{\Delta \tilde{b}_n} + \tilde{a}_n}{2 X_{(i-1)\Delta} \tilde{b}_n^2}}. \tag{12}$$

Dal punto di vista teorico, è interessante osservare che gli stimatori determinati godono anche di proprietà asintotiche di rilievo in statistica, quali ad esempio la consistenza e la normalità.

Usando il metodo di stima descritto e applicando in modo opportuno il teorema che ci assicura le proprietà asintotiche, abbiamo ottenuto i valori degli stimatori a, b, σ^2 con i dati in nostro possesso:

Parametri	Stime	Intervalli di confidenza 95%
a	1.9394	(1.9333, 1.9456)
b	-0.3384	(-0.3395, -0.3373)
σ^2	0.0235	(0.0234, 0.0236)

In seguito, ci siamo interessati alla componente di moto browniano presente nell'equazione (1). Una volta calcolati i parametri del modello, si possono avere varie previsioni dovute a k estrazioni casuali del moto browniano. Ottenendo k scenari diversi per un tasso d'interesse fissato, l'equazioni del modello CIR che vengono implementate, in un tempo discreto, sono:

$$\begin{aligned} r_{t+1} &= r_t + (a + br_t)\Delta_t + \sigma\sqrt{r_t}\sqrt{\Delta_t}\varepsilon_{1,t} \\ \vdots &= \vdots \\ r_{t+1} &= r_t + (a + br_t)\Delta_t + \sigma\sqrt{r_t}\sqrt{\Delta_t}\varepsilon_{k,t}. \end{aligned}$$

Si è valutato che il numero k di scenari più ragionevole sia di 10. Allora il tasso spot previsto dal CIR è stato calcolato sulla media dei k scenari implementati per ogni previsione giornaliera.

Si è notato che il modello CIR implementato fornisce tassi in media molto vicini a quelli di mercato. Tuttavia, dato il metodo di stima dei parametri, questo risultato non è sufficiente ad assicurare che il modello abbia un contenuto economico finanziario e che la procedura adottata non sia semplicemente un metodo sofisticato di interpolazione dei dati. Pertanto, ulteriori test sono stati diretti ad accertare la coerenza dei valori stimati. Successivamente, si è visto su quanti giorni calibrare il modello e come la scelta del numero dei giorni possa influire sulla bontà delle previsioni. Bisogna fare particolare attenzione in quanto se si prolunga troppo all'indietro la serie dei dati, può essere che si finisca con l'inglobare elementi non significativi perché troppo vecchi, mentre riducendo troppo l'ampiezza della serie vi è il rischio di perdere rappresentatività.

Sono state analizzate varie situazioni della serie storica (ossia con diversa volatilità), e si è studiato il comportamento del modello CIR rispetto a quello della serie storica stessa. Dopo un'attenta analisi, di tipo *Back Tracking*, si è deciso di considerare un periodo di 15 giorni di calibrazione per studiare l'affidabilità del modello CIR applicato al mercato obbligazionario italiano. Purtroppo, in letteratura non ci sono molte discussioni in merito, quindi la metodologia che si è seguita è puramente empirica.

Si è messo a confronto il tasso simulato CIR con quello della serie storica ipotizzando quest'ultima come un possibile scenario futuro. Quindi, si sono considerate varie finestre temporali e per ognuna di esse si è cercato di trovare una qualche relazione che legasse il comportamento del modello CIR a quello della serie storica.

In conclusione, l'evoluzione dei tassi d'interesse ottenuta con il modello CIR si rivela coerente con quanto era lecito attendersi. Infatti, si può affermare che le informazioni fornite dal modello CIR sono in linea con le caratteristiche del mercato e con il corrispondente atteggiamento dell'investitore: man mano che la volatilità aumenta e che l'andamento dei tassi si fa più imprevedibile, il modello non riesce a raccogliere abbastanza informazioni e rimane piuttosto legato all'andamento del tasso relativo all'intervallo della calibrazione.

Un approfondimento del presente lavoro potrebbe essere, lo studio di un modello tipo "*CIR più salto*". Tale modello è di tipo diffusivo con possibilità (rare) di salti. Il processo appare dunque continuo per lunghi periodi, presentando però discontinuità di diversa ampiezza variamente disseminate. È evidente come questo modello potrebbe essere una migliore approssimazione dell'evoluzione dei tassi nel mondo reale, nel quale andamenti praticamente continui vengono bruscamente interrotti, di tanto in tanto, da improvvise forti variazioni. Purtroppo questa classe di modelli è dal punto di vista teorico molto complessa perché richiede una stima sia per i parametri drift e diffusione sia per quelli relativi ai salti, con rari casi in cui si possono ottenere soluzioni in forma chiusa. È proprio per queste difficoltà analitiche e per l'alta complessità dell'algoritmo che a volte si preferisce lavorare ancora con modelli ad un solo fattore, come per esempio, il modello di Cox-Ingersoll-Ross.

Bibliografia

[1] Y. Ait-Sahalia. Testing continuous-time models of the spot interest rate. In *Review of Financial Studies*, volume 9, pages 385–426, 1996.

[2] P. Baldi. *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni.* Pitagora Editrice, 2000.

[3] O. Barndorff-Nielsen and M. Sørensen. A review of some aspects of asymptotic likelihood theory for stochastic processes. In *International Statistical Review*, volume 62,1, pages 133–165, 1994.

[4] E. Barone, D. Cuoco, and E. Zautzik. *La struttura dei rendimenti per scadenza secondo il modello di Cox, Ingersoll e Ross: una verifica empirica.* Temi di discussione 128, Banca d'Italia, 1989.

[5] B. Bibby, M. Jacobsen, and M. Sørensen. Estimating functions for discretely sampled diffusion-type models. 2002.

[6] B. M. Bibby and M. Sørensen. Martingale estimation functions for discretely observed diffusion processes. In *Bernoulli*, volume 1(1/2), pages 17 – 40, 1995.

[7] B. M. Bibby and M. Sørensen. On estimation for discretely observed diffusions: A review. In *Theory of Stochastic Processes*, volume 2, pages 49 – 56, 1996.

[8] K. C. Chan, G. A. Karolyi, F. A. Longstaff, and A. B. Sanders. An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate. In *Journal of Finance*, volume 47, pages 1209 – 1227, 1992.

[9] Christensen, Poulsen, and Sorensen. Optimal inference in diffusion models of the short rate of interest. Number 102. CAF Working Paper Series, 2001.

[10] D. Duffie and K.J. Singleton. Simulated moments estimation of markov of asset prices. In *Econometrica*, volume 61, pages 929–952, 1993.

[11] O. Elerian, S. Chib, and N. Shephard. Likelihood inference for discretely observed non-linear diffusions. In *Econometrica*, 2001.

[12] B. Eraker. Mcmc analysis of diffusion models with application to finance. In *Journal of Bussiness and Economic Statistics*, volume 19, pages 177–191, 2001.

[13] M. Gentile and R. Renò. *Which model for the italian interest rates?* 2002.

[14] R. Gibson, F.-S. Lhabitant, and D. Talay. *Modeling the term structure of interest rate: a review of the literature.* Risklab Research Paper, 2001.

[15] A. Göing. Estimation in financial models. In *Risklab*, 1996.

[16] A. Göing-Jaeschke. *Parameter Estimation and Bessel Processes in Financial Models and Numerical Analysis in Hamiltonian Dynamics.* PhD thesis, Ruhr-Universität Bochum, 1998.

[17] V.P. Godambe and C.C. Heyde. Quasi likelihood and optimal estimation. In *Int. Statist. Rev.*, volume 55, pages 231 – 244, 1987.

[18] P. Hall and C.C. Heyde. *Martingale Limit Theory and Its Application.* Academic Press, New York, 1980.

[19] C.C. Heyde. On combining quasi-likelihooh estimating functions. In *Stochastic Processes and their Applications*, volume 25, pages 281–287, 1987.

[20] C.C. Heyde. Fixed sample and asymptotic optimality for classes of estimating functions. In *Contemporary Mathematics*, volume 80, pages 241 – 247, 1988.

[21] N. Ikeda and S. Watanabe. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes.* North Holland, Amsterdam, 1981.

[22] J. James and N. Webber. *Interest rate Modelling.* J. Willey and Sons, Chichester, New York, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto, 2000.

[23] P.E. Kloeden and E. Platen. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations.* Springer-Verlag, New York, 1991.

[24] D. Lamberton and B. Lapeyre. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance.* Chapman-Hall, London, 1996.

[25] R.S. Liptser and A.N. Shiryaev. *Statistics of Random Processes*, volume I, II. Springer-Verlag, New York, 1977.

[26] C. Mari and R. Renò. *Credit Risk Analysis of Mortgage Loans: an Application to the Italian Market.* Quaderni del Dipartimento di Economia Politica, Università di Siena, 2001.

[27] F. Pegoraro. *La struttura a termine dei tassi di interesse e trading su titoli: un approccio con il modello CIR al mercato italiano dei BTP.*

[28] L. C. G. Rogers. Which model for term-structure of interest rates should one use? In *Mathematical Finance, IMA*, volume 65, pages 93 – 116, New York, 1995. Springer.

[29] M. Sørensen. Lectures on statistical inference for discretely observed diffusions. In *Berliner Graduiertenkolleg Stochastische Prozesse und Probabilistische Analysis*, 1997.

[30] L. Torosantucci. *Determinazione della struttura a termine dei tassi di interesse.* Progetto IAC-INA, 2001.

[31] B. Tuckman. *Fixed Income Securities: Tools for Today's Markets.* J.Wiley and Sons, Inc., 1995.