



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE  
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N. – CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica

# Modellizzazione di una costellazione di satelliti tramite le Reti di Petri

Relatori

Prof. Marco Liverani  
Prof.ssa Elisabetta Scoppola

Candidato

Maria Rosaria Montalto

Relatore esterno

Dott.ssa Beatrice Ratti  
(Alenia Spazio S.p.A.)

ANNO ACCADEMICO 2003-2004

Classificazione AMS: 90B25, 90B10, 90B15

Parole chiave: reti di Petri, modelli stocastici, simulazioni.

## Premessa

Questa tesi è stata originata dall'esigenza di Alenia Spazio di ottenere un modello ottimale che potesse descrivere un sistema satellitare geostazionario in modo dinamico attraverso una rappresentazione grafica basata su un modello matematico. Tale esigenza nasce dalla necessità di potere utilizzare un modello della costellazione sufficientemente realistico per poter procedere a particolari analisi di sistema quali quelle sulla sua affidabilità. Tale modellizzazione doveva essere estesa non solo alle fasi di missione della costellazione, ma comprendere anche le fasi di costruzione, lancio, messa in orbita e manutenzione di nuovi satelliti messi in orbita allo scopo di sostituire quelli eventualmente in avaria o comunque fuori servizio garantendo altresì la disponibilità del sistema con una probabilità non inferiore al 90%.

Il modello matematico basato sulle reti di Petri fornisce una risposta valida a questa esigenza.

Grazie all'utilizzo di un tool di modellizzazione basato sulle reti di Petri messo a disposizione da Alenia Spazio, quale il tool MissRdP della francese GFI-Consulting, è stato possibile implementare un modello dinamico di costellazione satellitare geostazionaria, verificarne la funzionalità e misurarne la disponibilità mediante opportune simulazioni.

Quella descritta in questa tesi è solo una delle innumerevoli applicazioni pratiche delle reti di Petri in quanto esse, in generale, consentono di ottenere un formalismo utile alla modellistica e all'analisi del comportamento dinamico di sistemi ad eventi discreti. Sono state proposte da Carl Adam Petri nel 1962, nella propria tesi di dottorato, come strumento generale per la modellizzazione di sistemi concorrenti, con particolare attenzione alla descrizione dei rapporti di causalità tra eventi.

I motivi che rendono interessante il loro utilizzo sono molteplici. Innanzitutto, le reti di Petri sono state proposte come strumento di modellizzazione formale necessario sia per eliminare ogni fonte d'ambiguità nella rappresentazione sia per effettuare analisi e verifiche sul comportamento del sistema. Inoltre, sono dotate di una rappresentazione grafica molto intuitiva che ne facilita l'uso, anche con strumenti assistiti dal calcolatore. Infatti, le reti di Petri possono rappresentare in modo compatto concetti generali quali sincronizzazione di processi, il succedersi asincrono di eventi, operazioni concorrenti, conflitti e condivisione di risorse. Inoltre, le reti di Petri consentono di rappresentare sinteticamente sistemi ad infiniti stati anche tramite un grafo con un numero finito di nodi.

Altra caratteristica fondamentale è che in una rete di Petri lo stato di un sistema e la transizione di stato sono concetti distribuiti: lo stato complessivo della rete è interpretabile come composto da più stati parziali ed indipendenti relativi a sottoreti. Analogamente, una transizione in generale si limita a influenzare solo una parte dello stato complessivo. Per questo motivo è possibile rappresentare due eventi, che in un determinato stato possano

verificarsi l'uno indipendentemente dall'altro, tramite due transizioni della rete che possono "scattare" in modo concorrente. Infine, le reti di Petri si prestano a rappresentare in modo naturale sistemi asincroni (in cui gli eventi non sono vincolati ad accadere secondo una frequenza ben definita): non è possibile in una rete infatti forzare una specifica transizione di stato ad aver luogo qualora ve ne siano più di una abilitate a farlo in una data configurazione.

La tesi è articolata in due parti. Nella prima parte viene affrontato lo studio generale delle reti di Petri, mentre nella seconda parte viene presentata un'applicazione delle reti di Petri nello studio della disponibilità di una costellazione di satelliti, dove per disponibilità si intende la probabilità che un sistema sia utilizzabile ad un certo tempo  $t$  dopo l'inizio dell'operazione.

## Le reti di Petri

La prima parte della tesi è strutturata su quattro capitoli.

Nel *primo capitolo* vengono presentati alcuni esempi e modelli di reti, in modo da fornire un primo sguardo di insieme sugli schemi strutturali e rappresentativi tipici delle reti e viene messo in evidenza il fatto che in generale si possono distinguere due tipi diversi di reti: le reti di condizioni ed eventi  $C/E$  e le reti di posti e transizioni  $P/T$ .

Nel *secondo capitolo* vengono trattate in dettaglio le *reti di condizioni ed eventi* ( $C/E$ ).

Gli elementi costitutivi di una rete ( $C/E$ ) sono:





Le condizioni	
Gli eventi	
Gli archi	
Le marche	

Figura 1: Elementi costitutivi.

Una rete di Petri  $C/E$  è dunque un grafo bipartito i cui nodi sono le condizioni e gli eventi collegati da archi. L'insieme delle condizioni permette di rappresentare gli stati del sistema; l'insieme degli eventi rappresenta invece l'insieme di azioni il cui manifestarsi provoca il cambiamento dello stato del sistema.

**Definizione 1** Una rete di Petri  $C/E$  è la terna  $(S, T; F)$ , dove

$S$  è l'insieme di eventi (*finiti*)  $S = \{S_i\}, i = 1, 2, \dots, |S|, |S| < \infty$

$T$  è l'insieme delle condizioni (*finito e disgiunto da S*)  $T = \{T_k\}, k = 1, 2, \dots, |T|, |T| < \infty, S \cap T = \emptyset$

$F$  è la relazione di flusso (*indica quali coppie  $(s, t) \in S \times T$  o  $(t, s) \in T \times S$  sono connesse da un arco, e dice quindi il verso dell'arco*)  $F \subseteq (S \times T) \cup (T \times S)$ .

**Definizione 2** Detto  $n$  un nodo della rete (*condizione o evento*), l'insieme delle sue **precondizioni** è l'insieme dei nodi dai quali parte un arco che arriva a  $n$  e si indica con  $\bullet n$ .

Detto  $n$  un nodo della rete (condizione o evento), l'insieme delle sue **postcondizioni** è l'insieme dei nodi ai quali arriva un arco che parte da  $n$  e si indica con  $n\bullet$ .

**Definizione 3** Una condizione si dice **verificata** se essa contiene una marca. L'insieme delle condizioni verificate in una certa situazione è chiamato **caso**. Un evento è **abilitato** in un caso se tutte le sue precondizioni sono marcate (cioè appartengono al caso) e se tutte le sue postcondizioni non lo sono (cioè non appartengono al caso).

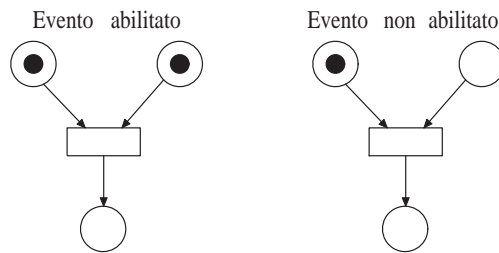


Figura 2: Esempio di un evento abilitato e di un evento non abilitato.

Nel primo esempio l'evento è abilitato in quanto tutte le sue precondizioni sono marcate e tutte le postcondizioni non lo sono. Nel secondo esempio invece l'evento non è abilitato perchè una delle precondizioni non è marcata.

La manifestazione di un evento provoca la rimozione da ogni posto a monte (cioè nelle sue precondizioni) e l'aggiunta ad ogni posto a valle (cioè nelle sue postcondizioni) di una marca. La marcatura di tutti i posti che non siano nè di ingresso nè di uscita all'evento rimane inalterata.

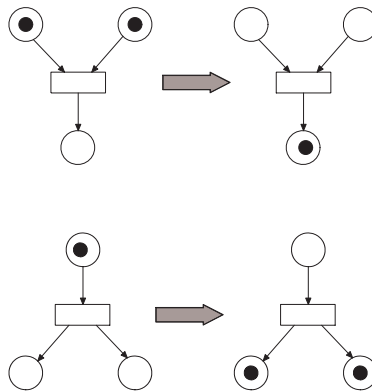


Figura 3: Manifestazione di un evento.

In figura 3 sono rappresentati due esempi di manifestazione di un evento. E' importante osservare che non c'è conservazione del numero delle marche. Lungo l'evoluzione della rete infatti, lo scatto delle transizioni provoca un "flusso" di marche. Tuttavia, per usare bene le reti al fine di descrivere sistemi fisici, che è quanto ci interessa, non è bene pensare (come invece si potrebbe essere portati a fare) che le marche "attraversino" la transizione. E' molto più corretto pensare che le marche tolte dai posti d'ingresso scompaiano e che si creino marche nei posti d'uscita.

Nella manifestazione di un evento possono crearsi due diversi tipi di situazioni particolari: situazioni di conflitto e situazioni di concorrenza.

**Definizione 4** *Due eventi si dicono in conflitto quando hanno precondizioni o postcondizioni in comune.*

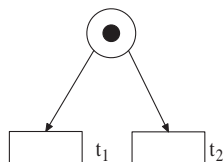


Figura 4: Situazione di conflitto.

**Definizione 5** *Due eventi si dicono concorrenti se possono scattare indipendentemente l'uno dall'altro.*

In figura 5  $t_1$  e  $t_2$  sono eventi concorrenti.

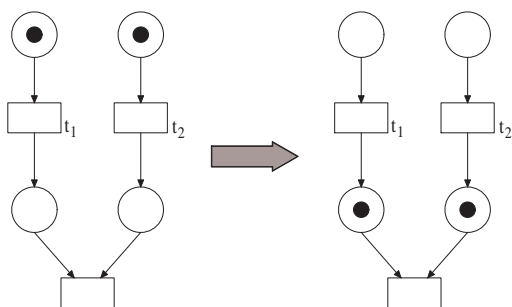


Figura 5: Situazione di concorrenza.

Nel *terzo capitolo* vengono introdotte invece le nozioni fondamentali riguardanti le *reti di posti e transizioni*, si pone l'accento sulla loro rappresentazione matematico algebrica cioè quella *matriciale*, attraverso la quale

si può giungere ad una rappresentazione della rete in termini di *equazione di stato*.

Gli elementi costitutivi di una rete  $P/T$  sono:



I posti	
Le transizioni	
Gli archi	
Le marche	
I Pesi	W
Le capacità	K

Figura 6: Elementi costitutivi.

Una rete di Petri  $P/T$  è dunque un grafo bipartito i cui nodi sono i posti e le transizioni che rappresentano rispettivamente gli stati del sistema e le azioni che ne provocano il cambiamento. Più precisamente, i posti giocano il ruolo di variabile di stato del sistema e sono a valori interi. Graficamente, questi valori interi sono rappresentati da altrettante marche contenute nel posto che a differenza delle reti  $C/E$  possono contenere più di una marca. Il numero massimo di marche che un posto può contenere è pari alla sua capacità  $K$ . I posti e le transizioni sono collegati da archi che però a differenza delle reti  $C/E$  sono caratterizzati da un peso.

**Definizione 6** Una rete  $P/T$  è la sestupla  $(S, T; F, W, K, M_0)$ , dove:

$S$  è l'insieme di eventi (*finiti*)  $S = \{S_i\}, i = 1, 2, \dots \mid S \mid \mid S \mid < \infty$

$T$  è l'insieme delle condizioni (*finito e disgiunto da S*)  $T = \{T_k\}, k = 1, 2, \dots, \mid T \mid, \mid T \mid < \infty, S \cap T = \emptyset$

$F$  è la relazione di flusso (*indica quali coppie  $(s, t)$  o  $(t, s)$  sono connesse da un arco, e dice quindi il verso dell'arco*)  $F \subseteq (S \times T) \cup (T \times S)$

$W$  è la funzione peso (*associa ad ogni arco un numero intero positivo*)  
 $W : F \rightarrow \mathbf{N} - \{0\}$

$K$  è la funzione capacità (*associa una capacità ad ogni posto*)  $K : S \rightarrow \mathbf{N}$

$M_0$  è la funzione marcatura iniziale (indica quanti gettoni ci sono all'inizio in ogni posto)  $M_0 : S \rightarrow N$

**Definizione 7** Una transizione è **abilitata** se tutti i posti delle sue precondizioni (definite in modo analogo alle reti C/E) contengono un numero di marche almeno pari al peso dell'arco che li connette alla transizione.

In figura 7 è rappresentato un esempio di transizione abilitata. Infatti ogni precondizione contiene un numero maggiore o uguale del peso dell'arco che la connette alla transizione. Nel secondo esempio invece la transizione non è abilitata in quanto una delle precondizioni contiene un numero minore di marche rispetto al peso dell'arco che la connette alla transizione.

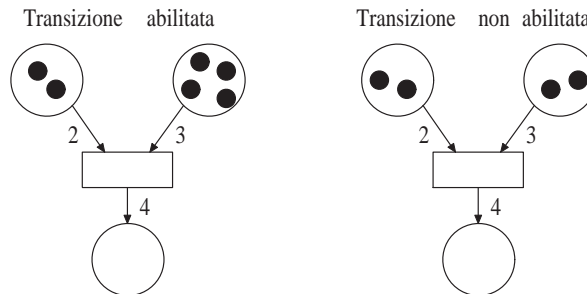


Figura 7: Esempio di transizione abilitata e di transizione non abilitata.

Lo scatto di una transizione provoca la rimozione da ogni posto a monte (cioè dalle precondizioni) e l'aggiunta ad ogni posto a valle (cioè ad ogni postcondizione) di un numero di gettoni pari al peso degli archi che la collegano a tali posti. La marcatura di tutti i posti che non siano nè di ingresso nè di uscita alla transizione rimane inalterata.

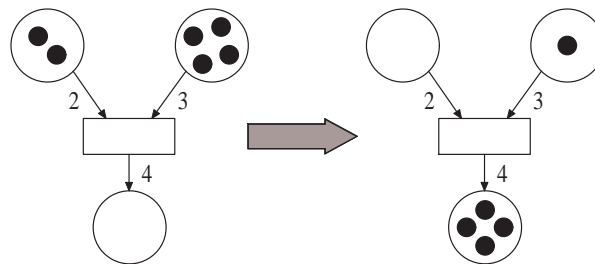


Figura 8: Scatto di una transizione.

In figura 8 è rappresentato un esempio di scatto di una transizione. Anche in questo caso è importante osservare che come nel caso delle reti C/E non c'è conservazione delle marche.



La regola di scatto non è sufficiente a determinare compiutamente l'evoluzione di una rete perché, in una generica marcatura, può esserci una situazione di *conflitto* (come nelle reti  $C/E$ ) ovvero che più transizioni risultino abilitate allo scatto (e chiaramente se si sceglie di farne scattare certune o certe altre l'evoluzione futura della rete non è la stessa). A differenza delle reti  $C/E$  è importante distinguere a questo proposito tra *conflitto strutturale* e *conflitto effettivo*. In figura 9  $t_1$ ,  $t_2$  e  $t_2$ ,  $t_3$  sono in conflitto strutturale in quanto hanno precondizioni in comune, ma solo  $t_2$ ,  $t_3$  sono in conflitto effettivo. Infatti se scatta  $t_2$ ,  $t_3$  non può più scattare. Invece se scatta  $t_1$ ,  $t_2$  può scattare (e viceversa).

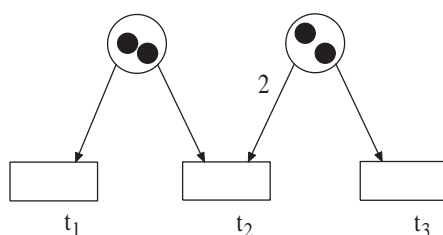


Figura 9: Esempio di conflitto.

Nelle reti  $P/T$ , viene adottata per la determinazione della transizione da far scattare la seguente regola: si consideri una rete  $P/T$  con marcatura corrente  $M$  e sia  $S$  l'insieme delle transizioni abilitate in  $M$ ; solamente una transizione di  $S$  viene scelta, a caso, per lo scatto.

Il criterio di scelta è del tutto *non-deterministico*. Il criterio garantisce il rispetto della *località* dell'evoluzione del sistema, cioè l'indipendenza degli eventi. Una volta che una transizione abilitata scatta, per decidere quale sarà la futura transizione abilitata a scattare si deve attuare una nuova valutazione della rete, in quanto la marcatura creata dallo scatto della precedente transizione può aver abilitato nuove transizioni e aver disabilitato alcune di quelle abilitate in precedenza.

Anche nel caso delle reti  $P/T$  si possono creare oltre a situazioni di conflitto anche situazioni di concorrenza

**Definizione 8** Due transizioni  $t_1$  e  $t_2$  sono fra loro in **concorrenza strutturale** quando non condividono alcun posto d'ingresso, cioè lo scatto di una delle due transizioni non disabilita l'altra.

Si introduce, come nel caso del conflitto, il concetto di *concorrenza effettiva*, situazione che si presenta solo durante l'evoluzione della rete. Due transizioni  $t_1$  e  $t_2$  si dicono in concorrenza effettiva nella marcatura  $M$  se sono abilitate entrambe in  $M$ . Si osservi che la concorrenza strutturale im-

plica che possa verificarsi quella effettiva.

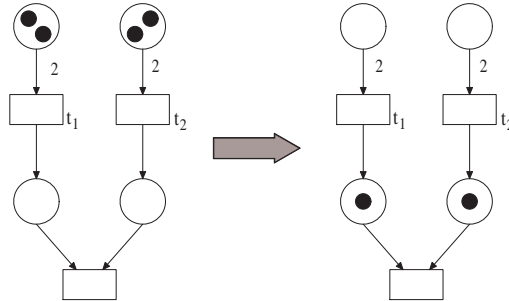


Figura 10: Situazione di concorrenza.

Oltre alla comoda rappresentazione grafica, le reti di Petri sono dotate anche di una rappresentazione matematica relativamente semplice. Tale rappresentazione, detta *matriciale* o *algebraica*, può essere utile per eseguire analisi automatiche della rete, al fine di verificare il soddisfacimento di alcune proprietà di base. La rappresentazione algebrica delle reti di Petri si basa sui concetti di:

- Matrice d'ingresso
- Matrice d'uscita
- Matrice d'incidenza
- Vettore marcatura
- Sequenza di scatti
- Vettore delle occorrenze

Inoltre, con tale rappresentazione si può descrivere l'evoluzione di una rete di Petri in termini di *equazione di stato*, cioè in modo molto simile a come si descrive l'evoluzione di un qualunque sistema dinamico.

**Definizione 9** Si definisce **matrice d'ingresso**  $I$  la matrice che ha  $|S|$  righe (una cioè per ogni posto della rete) e  $|T|$  colonne (una per ogni transizione della rete). Il suo elemento di posizione  $(k, j)$  vale quanto il peso dell'arco che va dal posto  $k$  alla transizione  $j$  se quest'arco c'è, se no vale zero. La matrice  $I$  è dunque definita come  $I_{|P|,|T|}$  con

$$I(k, j) = \begin{cases} W(s_k, t_j), & \forall (s_k, t_j) \in F; \\ 0, & \forall (s_k, t_j) \notin F. \end{cases}$$

**Definizione 10** Si definisce **matrice d'uscita**  $O$  la matrice che ha  $|S|$  righe (una cioè per ogni posto della rete) e  $|T|$  colonne (una per ogni transizione della rete). Il suo elemento di posizione  $(k, j)$  vale quanto il peso dell'arco che va dalla transizione  $k$  al posto  $j$  se quest'arco c'è, se no vale zero. La matrice  $O$  è dunque definita come  $O_{|P|,|T|}$  con

$$O(k, j) = \begin{cases} W(t_k, s_j), & \forall (t_k, s_j) \in F; \\ 0, & \forall (t_k, s_j) \notin F. \end{cases}$$

**Definizione 11** Si definisce **matrice d'incidenza**  $C$  la matrice che ha  $|S|$  righe (una cioè per ogni posto della rete) e  $|T|$  colonne (una per ogni transizione della rete). Essa è definita come  $C = O - I$ .

**Definizione 12** Data una rete con marcatura  $M$ , si definisce il **vettore marcatura**  $m$  come il vettore colonna di dimensione  $|S|$  le cui componenti sono valori interi non negativi che rappresentano il numero di marche contenute in ogni posto della rete. Il vettore  $m$  è pertanto definito come

$$m = [m_1 m_2 \dots m_{|S|}]', \text{ con } m_i = M(s_i), i = 1, 2, \dots, |S|.$$

Con la definizione del vettore marcatura e della matrice di incidenza, i concetti di abilitazione e di scatto di una transizione possono essere riformulati in modo molto semplice ed intuitivo. Se infatti evidenziamo le  $|T|$  colonne nelle matrici  $I, O$  e  $C$  scrivendo che

$$I = [I_1 I_2 \dots I_{|T|}], O = [O_1 O_2 \dots O_{|T|}], C = [C_1 C_2 \dots C_{|T|}],$$

allora la condizione di abilitazione della transizione  $i$ -esima nella marcatura  $M$  diventa semplicemente  $M \geq I_i$  ovvero il fatto che in  $M$  vi siano, nei posti di preset per la transizione  $i$ -esima, almeno tante marche quant'è il peso dell'arco tra ognuno dei primi e la seconda. Inoltre, lo scatto della transizione  $i$ -esima a partire dalla marcatura  $M$  produce una nuova marcatura  $M^*$  che si calcola facilmente come

$$M^* = M + O_i - I_i = M + C_i$$

**Definizione 13** Una **sequenza di scatti** abilitata in una marcatura  $M_0$  è una sequenza di transizioni  $t_i, 1 \leq i \leq n, \in \mathbf{N} - \{0\}$ , tali che  $t_1$  è abilitata in  $M_0$  e lo scatto di  $t_i$  porta in una marcatura in cui  $t_{i+1}$  è abilitata.

**Definizione 14** Il **vettore delle occorrenze**  $s$ , associato ad una sequenza di scatti  $S$ , è un vettore colonna di dimensioni  $|T|$ , la cui componente generica  $s_i$  è pari al numero delle occorrenze della transizione  $t_i$  nella sequenza  $S$ .

Dalle definizioni e osservazioni fatte precedentemente è possibile giungere ad una formulazione molto compatta dell'evoluzione di una rete di Petri, in termini del tutto simili a quella di un qualunque sistema dinamico. Ad una rappresentazione di questo tipo si dà il nome di **equazione di stato**, in quanto serve a calcolare lo "stato successivo" (cioè la marcatura) di una rete nota la marcatura precedente e l'evento (lo scatto di una transizione) avvenuto. Si supponga infatti che  $M_0$  sia la marcatura corrente di una data rete con matrice di incidenza  $C$ , e si supponga inoltre che sia possibile applicare una certa sequenza di scatti  $S$ , con vettore delle occorrenze  $s$ . Sia  $M_1$  la marcatura raggiunta dopo l'applicazione della sequenza  $S$ . Si può facilmente osservare che

$$M_1 = M_0 + Cs.$$

Quest'equazione governa l'evoluzione della rete in quanto dice, qual è lo stato attuale (la marcatura  $M_1$ ), noto lo stato iniziale (la marcatura iniziale  $M_0$ ) e noti gli eventi avvenuti dall'inizio ad ora (la sequenza  $S$ , che ovviamente deve essere ammissibile). E' un'equazione lineare ed ha una fortissima analogia con la legge di evoluzione dei sistemi dinamici.

Nel *quarto capitolo* viene presentato oltre a un quadro di insieme di quelli che sono gli elementi principali delle reti  $C/E$  e  $P/T$  anche un tipo particolare di reti  $P/T$ : le *reti di Petri temporizzate*

Le reti di Petri ordinarie infatti non includono alcun concetto di tempo. Con questa classe di reti, è possibile descrivere la struttura logica di un sistema, ma non la sua evoluzione temporale. Nascono così varie estensioni alle reti per introdurre la variabile tempo. Tali estensioni non sono del tutto equivalenti, e corrispondono a ipotesi modellistiche diverse.

Nel seguito sono riportate le estensioni temporali delle reti più utilizzate:

1. ogni transizione rappresenta un evento, il cui verificarsi è perciò istantaneo; ad ogni transizione si associa un intervallo di tempo  $(t_{min}, t_{max})$ ;  $t_{min}$  rappresenta il tempo minimo che deve passare dall'istante in cui viene abilitata la transizione, mentre  $t_{max}$  indica il massimo ritardo rispetto all'istante abilitazione, entro il quale la transizione deve scattare, a meno che essa non venga disabilitata nel frattempo;
2. ogni transizione rappresenta un'attività del sistema, che quindi richiede tempo non nullo per poter essere portata a termine. Ad ogni transizione viene associata una durata e lo scatto avviene nei seguenti passi:
  - i gettoni vengono rimossi dai posti di ingresso non appena la transizione viene abilitata;
  - la transizione permane nella fase di scatto per tutta la sua durata;
  - alla fine della fase di scatto, si ha la produzione di gettoni nei posti d'uscita;

Più in generale esistono due distinte tipologie di reti temporizzate:

- *Reti di Petri Deterministiche* in cui viene definita una variabile  $X$  che rappresenta il tempo di completamento dell'attività. La transizione che rappresenta tale attività dopo che viene abilitata è tale che la partenza o lo scatto non sarà immediato ma dipenderà dal tempo definito in  $X$ .
- *Reti di Petri Stocastiche* in cui la quantità  $X$  definita su una generica transizione non è una quantità deterministica, ma è di fatto una variabile aleatoria che rappresenta la caratteristica di "utilizzo" di quella transizione.

## Applicazione delle reti di Petri ad una costellazione di satelliti geostazionari

Nella seconda parte di questa tesi abbiamo affrontato lo studio della disponibilità di una costellazione di satelliti in orbita geostazionaria intorno alla Terra, utilizzando le reti di Petri stocastiche. Il modello che abbiamo costruito ci permette di compiere delle simulazioni realistiche e di studiare il comportamento del sistema, ed in particolare della funzione disponibilità, al variare del tempo o di alcune condizioni iniziali.

Nel *quinto capitolo* vengono introdotti i satelliti artificiali e in particolare quelli geostazionari che hanno l'importante proprietà di apparire fissi sulla volta celeste in modo che, qualsiasi osservatore terrestre, situato entro l'area di copertura del satellite, può captare i suoi segnali orientando opportunamente un'antenna (normalmente di tipo parabolico)(Cf.[2]). Viene quindi studiato il moto di un satellite e le sue relazioni con le leggi di Keplero. Oltre a descrivere le proprietà dei satelliti geostazionari viene calcolata la loro altezza  $h$ , rispetto alla superficie terrestre arrivando alla conclusione che l'orbita geostazionaria si trova a un'altezza rispetto al suolo di 35800 Km e la loro velocità necessaria per rimanere su un'orbita circolare intorno alla Terra che è pari a 3 Km/s.

Nel *sesto capitolo* vengono introdotti invece i concetti di *Affidabilità*, *Disponibilità* e *Manutenibilità* (RAM Reliability, Availability, Maintainability) che si basano su principi matematici di probabilità e statistica (Cf.[8]). La ragione basilare per l'uso di questi concetti è l'incertezza nel fare la previsione di un guasto, durante il ciclo di vita di un satellite.

Per quanto riguarda l'affidabilità, consideriamo  $f(t)$  la funzione di densità di probabilità della variabile aleatoria, che chiamiamo "tempo al guasto" (time to failure). La funzione di distribuzione  $F(t)$  è la "funzione di non affidabilità" quando si parla di guasto. Essa può essere pensata come

rappresentante la probabilità di un guasto prima del tempo  $t$  ed è definita come la probabilità che la variabile aleatoria non sia più grande di  $t$  cioè

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(t)dt \quad (1)$$

**Definizione 15** Definiamo **funzione di affidabilità** la funzione  $R(t)$ , come la probabilità di non avere un insuccesso prima del tempo  $t$  ed è data da:

$$R(t) = 1 - F(t) = \int_t^{\infty} f(t)dt \quad (2)$$

Si può dimostrare che  $R(t)$  in particolari casi ha una distribuzione esponenziale.

La manutenilità invece, è una misura della facilità e rapidità con la quale un sistema può essere rimesso nelle condizioni operative dopo che si è verificato il guasto.

**Definizione 16** Definiamo la funzione di manutenibilità  $M(t)$  come probabilità di completare con successo una riparazione nel tempo  $t$ , o  $P(T \leq t)$ .

Infine quando si vuole caratterizzare un sistema riparabile bisogna considerare la probabilità che esso sia in condizioni di funzionamento soddisfacenti ad un determinato istante, essendo stato fino a quell'istante usato (cioè fatto funzionare ed eventualmente riparato); a questo parametro si dà il nome di *disponibilità*. La disponibilità dipende quindi da quella caratteristica intrinseca di un oggetto che è la sua affidabilità e dalla manutenibilità ovvero la probabilità che l'oggetto, una volta guasto, venga ripristinato in condizioni di uso soddisfacente in un tempo determinato mediante opportune azioni di manutenzione.

Nel *settimo capitolo* viene illustrata attraverso un esempio relativo ad una generica costellazione satellitare, la capacità delle reti di Petri Stocastiche di modellizzare e analizzare un simile sistema complesso, e viene messo in evidenza come, attraverso l'interpretazione dei risultati della modellizzazione, l'analisi di disponibilità possa essere utilizzata a livello di gestione dell'intero progetto.

Il modello costruito per questa analisi è mostrato in figura 11.

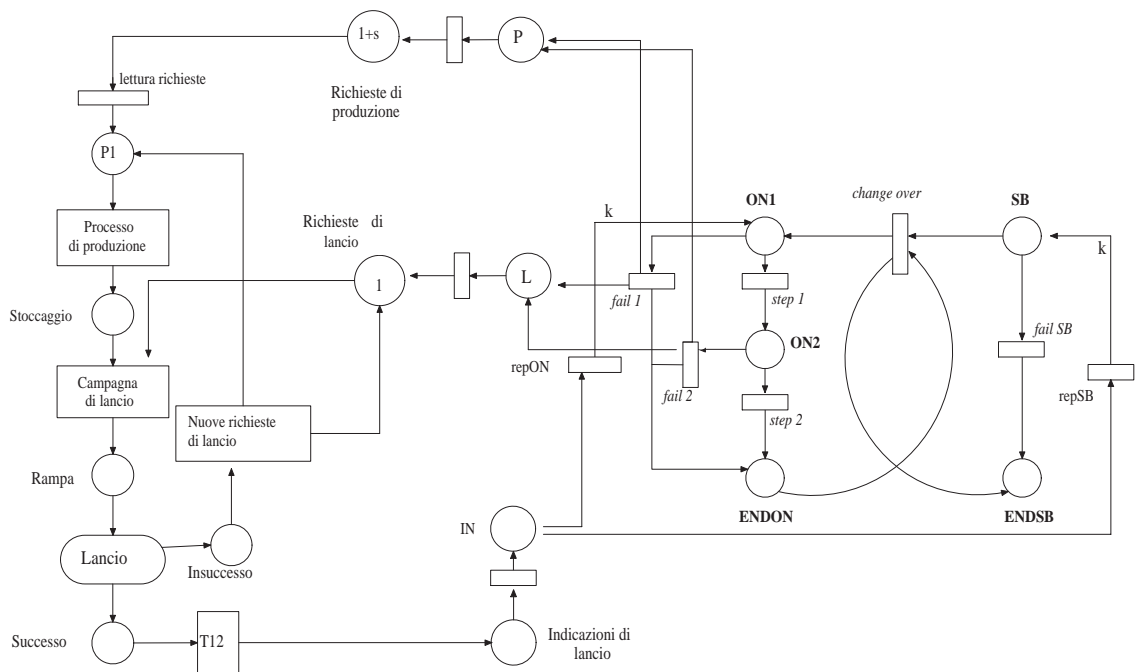


Figura 11: Modello globale completo.

L'intero sistema è suddiviso in due parti:

- il *segmento spaziale*, che dopo l'attivazione della costellazione consisterà in un insieme di satelliti geostazionari posizionati su un singolo piano orbitale (il piano equatoriale) sul quale si trovano  $k$  satelliti operativi.
- il *segmento terrestre* di supporto logistico, ovvero l'insieme di tutte le risorse necessarie ad attivare la costellazione e a mantenerla attiva durante tutto il suo ciclo di vita. Questo segmento include le seguenti risorse:
  - $c$  linee di produzione e integrazione, ognuna delle quali in grado di produrre  $k$  satelliti simultaneamente (nella realtà, per i satelliti geostazionari  $k = 1$ )
  - $s$  edifici di stoccaggio, ognuno dei quali in grado di contenere i  $k$  satelliti da porre in orbita
  - rampe di lancio indipendenti.

Allo stadio iniziale nessun satellite è stato prodotto, né lanciato, né messo in orbita, cosicché la marcatura iniziale è tale che sono richieste al sistema  $(1 + s)$  richieste di produzione e 1 lancio di  $k$  satelliti. Questo significa che

all'inizio ci saranno  $(1 + s)$  marche nel posto "richieste di produzione" e 1 marca nel posto "richieste di lancio".

Le *richieste di produzione*, se marcate, consentono l'inizio della produzione dei  $k$  satelliti.

Le *richieste di lancio*, se marcate e se lo "stoccaggio" non è vuoto, consentono il lancio dei  $k$  satelliti.

E' importante osservare che per il *lancio* il programma Miss RdP, con il quale implementeremo questo esempio, utilizza una transizione di tipo diverso rispetto a una transizione di una rete  $P/T$ , ma che può essere facilmente riconducibile a una di queste.

Questo nuovo tipo di transizione è una transizione di tipo stocastico il cui scatto però è "non determinato". Infatti sugli archi che partono da questa transizione viene associata una probabilità in modo che dopo il lancio si possano avere due possibilità: successo o insuccesso del lancio anche se a priori non si sa quale dei due posti in uscita verrà marcato, ma dipenderà dalle probabilità associate ai singoli archi.

Una transizione di questo tipo viene detta *non determinata* e graficamente, uniformandoci alla notazione adottata dal software Miss RdP, utilizzato per la nostra simulazione, viene rappresentato con un rettangolo dai bordi arrotondati.

Ritorniamo ora alla descrizione del modello globale.

Se il lancio fallisce, una nuova produzione è automaticamente attivata e un'altra richiesta di lancio è inviata al sistema.

Le *indicazioni di lancio* sono marcate con un "token" quando invece il lancio ha successo. Lo stesso token è successivamente raccolto dal modello della interfaccia di input rappresentato dal posto *IN*.

Una volta avvenuto il lancio i satelliti possono trovarsi in due differenti stati (o modi operativi): lo stato "attivo" e quello di "stand-by". Lo stato attivo è descritto dalla rete generata a partire dai posti *ON1* e *ENDON*, mentre lo stato di stand-by è descritto dalla rete generata a partire dai posti *SB* e *ENDSB*.

I due posti *ON1* e *ON2* si riferiscono ai possibili stati del satellite attivo prima di raggiungere la fine della propria vita operativa (posto *ENDON*). In ognuno dei due posti "ON" un satellite può essere soggetto a guasti (transizione fail1 e fail2) oppure raggiungere una fase successiva del proprio ciclo di vita (transizioni step1 e step2). Nel primo caso un token è generato in entrambi i posti di interfaccia di output  $P$  e  $L$ . Non appena si raccolgono  $p$  token nel posto di interfaccia di output  $P$  (e rispettivamente  $l$  nel posto di interfaccia di output  $L$ ), una richiesta di produzione (e rispettivamente di lancio) è inviata al modello del segmento terrestre di supporto logistico.  $k$  token sono quindi immessi nel posto di interfaccia di input *IN* del piano orbitale e sono utilizzati per rimpiazzare i satelliti attivi "dead". In modo analogo, un satellite in stand-by pronto per essere utilizzato come attivo



(posto  $SB$ ) può guastarsi (transizione  $failSB$ ) e divenire non più disponibile (posto  $ENDSB$ ).

I satelliti operativi non più disponibili possono essere rimpiazzati da uno dei satelliti lanciati da terra (transizione  $repON$ ) oppure sostituiti da un satellite pronto all'uso che si trova in stand-by (transizione  $change-over$ ).

Il supporto informatico da noi utilizzato per la valutazione del sistema è denominato **MISS-RdP** (acronimo francese che, in italiano, è traducibile come *Modello Interattivo e Sistema di Simulazione basato sulle Reti di Petri*). Esso supporta i modelli basati sulle reti di Petri stocastiche e fornisce risultati in formato standard di uso generale (Cf.[9]). La rete di Petri stocastica che abbiamo utilizzato per la simulazione è stata ottenuta associando opportune funzioni di distribuzione alle transizioni presenti nella rete mostrata in figura 11.

Nelle simulazioni implementate si suppone che ci siano sempre:

- 3 linee di produzione ognuna delle quali produce  $k$  satelliti, quindi  $c = 3$ .
- 2 edifici di stoccaggio, ognuno dei quali in grado di contenere  $k$  satelliti, cioè  $s = 2$ .
- lanciatori e rampe di lancio sempre disponibili.

Si suppone inoltre che siano due i parametri variabili:

- il numero  $k$  di satelliti da posizionare in orbita.
- il numero  $p$  e  $l$  di satelliti che si devono raccogliere rispettivamente nei posti di interfaccia di output  $P$  e  $L$  prima che venga fatta una nuova richiesta di produzione e di lancio di satelliti.

Dopo varie simulazioni si è trovato che la condizione che meglio ottimizza il modello è quella che si ottiene ponendo  $k = 7, p = l = 4$ . I risultati di questa simulazione sono ottenuti dopo 1000 history (MISS RdP produce 1000 simulazioni separate della rete in questione e fa la media dei vari risultati), da 1 a 129601 ore (l'unità è infatti l'ora e 129601 corrisponde a 15 anni). I risultati sono ottenuti e presentati ogni 4321 ore cioè ogni 6 mesi.

Il risultato più importante è quello relativo alla disponibilità. In questo esempio abbiamo fatto l'ipotesi che il sistema sia disponibile quando in orbita ci sono 2 o più satelliti attivi. I risultati ottenuti sono mostrati in figura 12.

## Disponibilità istantanea

```
DispoInstantanee (calcul Rapide, 1000 histoires, Nombre aleatoire initial : 1)
Etats      NONDISPO  DISPO
Date      Moyenne  Moyenne
1         1         0
4321     1         0
8641     1         0
12961    0,084    0,916
17281    0,005    0,995
21601    0,005    0,995
25921    0         1
30241    0         1
34561    0         1
38881    0         1
43201    0         1
47521    0         1
51841    0         1
56161    0         1
60481    0         1
64801    0         1
69121    0         1
73441    0         1
77761    0         1
82081    0         1
86401    0         1
90721    0         1
95041    0         1
99361    0         1
103681   0         1
108001   0         1
112321   0         1
116641   0,088    0,912
120961   0,093    0,907
125281   0,093    0,907
129601   0,095    0,905
```

Figura 12: Disponibilità istantanea del sistema.

La *disponibilità istantanea* è la probabilità che la rete si trovi nello stato di disponibilità al tempo  $t$ . Per esempio, nel nostro caso, la probabilità che la rete sia nello stato disponibilità al tempo  $t = 17281$  (2 anni) è uguale a 0.995. Quindi c'è il 99.5% delle possibilità che dopo 2 anni il sistema sia disponibile. Inoltre poichè la simulazione è costituita da 1000 history,  $(1000 \cdot 0.995)$  995 volte su 1000 si osserva che dopo 2 anni il sistema è disponibile.

In generale possiamo osservare, come si vede anche dal grafico, che fino ai 2 anni il sistema è sempre non disponibile con probabilità 1. Questa situazione è ragionevole poichè servono più o meno 2 anni affinché venga prodotto e lanciato il primo lotto di 7 satelliti. Dopo i primi due anni la probabilità che il sistema sia disponibile aumenta molto (0.995 circa nei due

anni e mezzo successivi) fino a che dopo 3 anni il sistema è disponibile con probabilità 1, ovvero stabile e a regime. Solo durante la fine della missione (ultimi 2 anni) la probabilità scende fino a 0.905, senza però scendere al di sotto dello 0.9 che era l'obiettivo che prefissato.

Da un punto di vista qualitativo, il fatto che la costellazione presenti una disponibilità costante ( $= 1$ ) per un certo numero di anni si giustifica con il fatto che la vita media di un satellite del tipo considerato nelle nostre analisi oscilla fra i 5 e i 7 anni (durata che dipende, come già detto, dalla disponibilità di carburante). Pertanto dal momento che tutti i satelliti "di prima generazione" sono stati messi in orbita contemporaneamente, almeno per i primi 5 anni, tutti i satelliti sono funzionanti contemporaneamente. Dopo, prima l'uno poi l'altro, termineranno la loro vita operativa e andranno sostituiti. Da questo punto in poi la disponibilità comincia ad oscillare attorno a valori tali che dovranno essere sempre maggiori di 0.9, fino al termine dell'utilizzo della costellazione (quando i satelliti in failure non verranno più sostituiti).

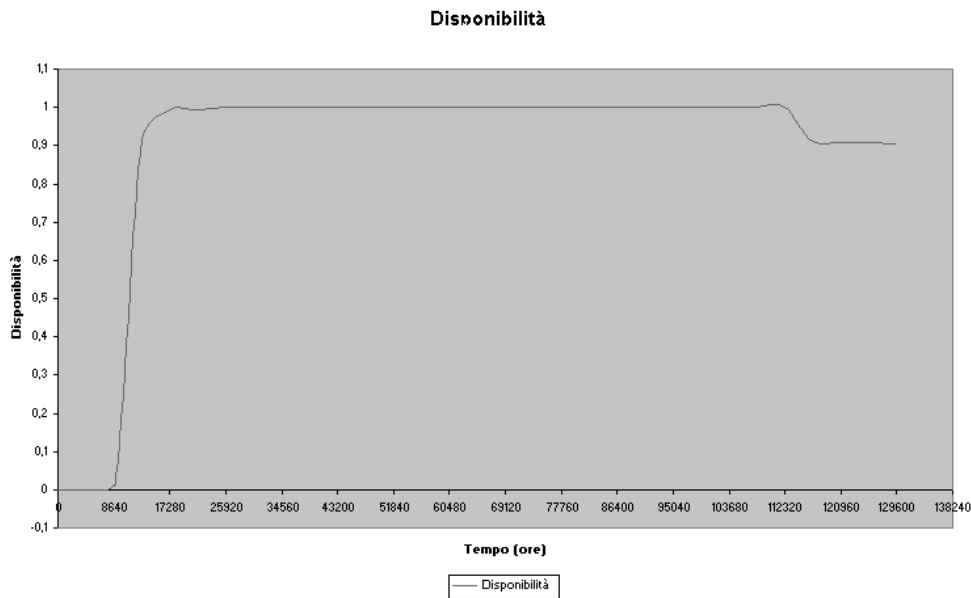


Figura 13: Grafico della disponibilità istantanea del sistema.

In quest'ultimo capitolo oltre al risultato relativo alla disponibilità vengono riportati altri risultati relativi a questa simulazione. Inoltre vengono confrontati i valori relativi alla disponibilità ottenuti da diverse simulazioni in cui cambiano i parametri  $k$ ,  $l$ , e  $p$ . Dal confronto di questi risultati si può concludere che i valori che meglio ottimizzano la disponibilità sono  $K = 7, l = p = 4$ .

## Conclusioni

Nel nostro lavoro abbiamo messo in luce la potenzialità di un'analisi di sistema attraverso le reti di Petri stocastiche. Fra le innumerevoli potenziali applicazioni, abbiamo potuto identificare una metodologia per il calcolo della disponibilità di una costellazione di satelliti in un caso reale: ciò è stato possibile grazie all'utilizzo di un tool informatico (MissRdP) che ha reso possibile la modellizzazione della costellazione e la simulazione di più casi di guasti.

E' importante osservare che il modello che è stato identificato può essere ampliato e reso ancor più complesso e vicino alla realtà aggiungendo fasi più specifiche sia nel segmento terrestre che nel segmento spaziale. I risultati ottenuti, inoltre, possono essere ulteriormente riutilizzati per finalità operative diverse. Nella simulazione, infatti, si è fatto riferimento ad un solo piano orbitale di satelliti geostazionari per telecomunicazioni, ma quanto detto in questo caso può essere esteso anche a costellazioni con più piani orbitali di satelliti non geostazionari come quelli utilizzati, ad esempio, nel campo della radionavigazione (GPS, Ground Positioning System).

Nel caso della costellazione che verrà utilizzata nel sistema di radionavigazione satellitare europeo *Galileo*, basata su più piani orbitali per un totale di 27 satelliti operativi e 3 in stand-by, è di importanza fondamentale la conoscenza su basi probabilistiche della disponibilità nel tempo dell'intera costellazione - ovvero dell'intero servizio su scala mondiale - nell'arco di tutta la vita operativa del sistema (oltre venti anni). In tal caso, il calcolo probabilistico della disponibilità è essenziale per poter predisporre a terra l'approvvigionamento dei satelliti per il rimpiazzo, al momento opportuno, dei satelliti in failure o non più operativi e garantire all'utente una disponibilità di servizio ben determinata.

Si tenga presente che, nel caso di Galileo, la disponibilità del servizio deve essere garantita con una probabilità altissima soprattutto in quei casi ad elevata criticità di servizio, ovvero quelli in cui è in gioco la stessa vita umana (navigazione assistita per gli aerei in fase di atterraggio, ad esempio).

Alla base del calcolo della disponibilità è di fondamentale importanza ottenere un modello della costellazione che tenga conto di tutti i parametri inerenti i fattori di rischio che possono determinare la failure di uno o più satelliti contemporaneamente; ciò può essere ottenuto mediante un modello costruito per affinamenti successivi di un modello base realizzato con reti di Petri che, partendo da un modello ideale, venga successivamente modificato allo scopo di mantenere oltre un determinato valore la disponibilità globale del sistema.

Come più volte affermato, volevamo un'ultima volta rimarcare il fatto che le reti di Petri applicate alla modellizzazione di una costellazione satellitare costituiscono solo una delle innumerevoli applicazioni nel campo della modellizzazione dinamica e delle analisi di sistemi ad eventi discreti.

Limitandosi a citare pochi esempi intuitivi potremmo fare riferimento alla modellizzazione di processi industriali e all'analisi gestionale in campo amministrativo o economico (uffici pubblici, banche, marketing, ecc).

# Bibliografia

- [1] G.W. Brams, *Le reti di Petri: teoria e pratica*. Masson italia editori, 1985.
- [2] B.R. Elbert, *Introduction Satellite Communication*. Artech House, 1987.
- [3] L. Ferrarini, *Automazione industriale: controllo logico con le reti di Petri*. Pitagora Editrice Bologna, 2001.
- [4] L. Ferrarini, L.Piroddi, *Esercizi di controllo logico con le reti di Petri*. Pitagora Editrice Bologna, 2002.
- [5] E. Fthenakis, *Manual of satellite communication*. Springer Verlag, 1982.
- [6] W. Reisig, *Petri Nets: an Introduction*. Springer Verlag, 1982.
- [7] C. Reutenauer, *Mathematics of Petri Nets*. Prentice Hall International, 1988.
- [8] *Elettronica reliability design handbook*.
- [9] *MISS RdP Reference Manual*.