

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica
di
Dario Martirani Paolillo

Metodi di controllo ottimo attivo nella elaborazione adattativa di immagine

Relatore
Prof. Roberto Ferretti

ANNO ACCADEMICO 2000 - 2001
LUGLIO 2001

Classificazione AMS : 68U10 (primaria), 49N20, 93C20 (secondarie).
Parole Chiave : Filtraggio di immagine, tempo di arresto ottimo.

Dario Martirani è nato a Napoli il 26 Maggio del 1976
ha conseguito il Diploma di Maturità Scientifica
presso il Liceo I.Vian di Bracciano (RM) nel 1994
si è immatricolato al Corso di Laurea in Matematica presso l'Università Roma Tre
nell'A.A. 1994-1995

Da circa tre anni, ormai, opera professionalmente nel campo informatico occupandosi di programmazione in vari linguaggi, progettazione di banche dati e formazione del personale.

TESINE ORALI PRESENTATE

1. L'algoritmo di Berlekamp (Matematica Applicata)
2. Interpolazione polinomiale (Analisi Numerica)

Indice

Introduzione	2
1 Definizione del problema	3
2 Filtraggio lineare	3
2.1 Presentazione del modello	3
2.2 Discretizzazione	4
2.3 Risultati ottenuti	5
3 Filtraggio nonlineare	7
3.1 Presentazione del modello	7
3.2 Discretizzazione	8
3.3 Risultati ottenuti	8
4 Tempo di arresto ottimo	11
4.1 Formulazione del criterio di arresto	11
4.2 Scelta di un criterio di arresto	12
4.3 Risultati ottenuti	13
5 Un nuovo modello	15
5.1 Premessa	15
5.2 Presentazione del modello	15
5.3 Scelta del funzionale di minimizzazione	17
5.4 Risultati ottenuti	17
Bibliografia	23

Introduzione

L'oggetto della nostra Tesi, di cui ora presentiamo una sintesi, è il filtraggio di segnali rumorosi. In particolare, in questo lavoro abbiamo concentrato i nostri sforzi su tecniche di elaborazione di immagini bidimensionali approfondendo metodologie già esistenti e proponendo un nuovo modello da noi elaborato.

Nell'approfondire queste metodologie di filtraggio, abbiamo supportato i risultati teorici con esperimenti e test numerici. È stato infatti eseguito un lavoro di implementazione dei modelli proposti in modo da fornire sia il filtraggio che la visualizzazione dell'immagine filtrata. Tutti i programmi sono stati sviluppati in *Fortran 77* e sono quindi utilizzabili sia su piattaforme Unix che Windows, ad eccezione di uno: per la visualizzazione delle immagini generate dai vari programmi è stato creato appositamente un software in *Visual Basic* che gira esclusivamente sotto Windows.

Alla definizione matematica del problema in esame, illustrata nel §1, seguirà la presentazione di un classico modello lineare di filtraggio (§2). Nel §3, dopo aver evidenziato gli inconvenienti del precedente modello, presenteremo un modello nonlineare proposto da *Alvarez, Lions e Morel* in [ALM] come modifica del modello di *Perona-Malik* illustrato in [PM]. Per entrambi i modelli proposti, comunque, è di cruciale importanza scegliere adeguatamente un criterio di arresto, poiché un tempo di filtraggio lungo comporta un'eccessiva diffusione del dato rumoroso. Quindi nel §4 affronteremo anche una tecnica di *Controllo Ottimo* del tempo di arresto. Infine proporremo nel §5, con lo scopo di migliorarne alcuni aspetti, una modifica al modello nonlineare introducendo un termine forzante costante nell'equazione.

Descriveremo ora, sinteticamente, i concetti e le metodologie discusse nella Tesi mostrando anche i risultati delle elaborazioni in modo da consentire una migliore valutazione dell'efficacia dei metodi presentati.

1 Definizione del problema

Sia Ω un quadrato chiuso di \mathbb{R}^2 , introduciamo il problema considerando un'immagine rumorosa descritta tramite una funzione $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, così definita

$$u_0(x_1, x_2) = \bar{u}(x_1, x_2) + n(x_1, x_2)$$

dove $\bar{u}(x_1, x_2)$ rappresenta una immagine iniziale alla quale viene aggiunto un rumore aleatorio "bianco" (ovvero a campioni incorrelati, e quindi con elevato contenuto di frequenze alte) $n(x_1, x_2)$.

Si vuole ottenere una riduzione del rumore $n(x_1, x_2)$ e quindi una stima del dato $\bar{u}(x_1, x_2)$ tramite tecniche di filtraggio del dato rumoroso $u_0(x_1, x_2)$. Tali tecniche non sono altro che modelli evolutivi presentati sotto forma di Problema di Cauchy con dato iniziale $u_0(x_1, x_2)$. In generale parleremo di immagine filtrata al tempo T intendendo la soluzione del generico problema

$$\begin{cases} u_t(x_1, x_2, t) = A(u(x_1, x_2, t)) & (x_1, x_2) \in \Omega, \quad t > 0 \\ u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial(\Omega) \end{cases} \quad (1.1)$$

calcolata al tempo T . Osserviamo che è stata scelta al bordo la condizione di Neumann invece di quella di Dirichlet poiché l'imporre un valore fissato sulla frontiera può ripercuotersi sui valori interni dell'immagine.

A seconda di come viene scelto l'operatore $A(\cdot)$, ovviamente, si possono costruire diversi modelli: noi analizzeremo sia una scelta lineare che una nonlineare per poi arrivare a proporre delle varianti.

2 Filtraggio lineare

2.1 Presentazione del modello

Il primo modello che prendiamo in esame è un modello lineare basato sull'equazione del calore:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, x_2, t) = \Delta u(x_1, x_2, t) \\ u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

dove $u_0(x_1, x_2)$ è il dato rumoroso di partenza. Non riporteremo in questa sintesi i principali risultati teorici riguardanti esistenza, unicità e regolarità della soluzione che invece sono enunciati e dimostrati nella Tesi. Ci limitiamo soltanto a ricordare che tale soluzione può essere espressa come

$$u(x, t) = G_t * u_0(x), \quad (2.2)$$

ovvero una convoluzione del dato iniziale con un opportuno nucleo regolarizzante che, nel caso di $\Omega = \mathbb{R}^2$, risulta essere la Gaussiana

$$G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}. \quad (2.3)$$

Tale convoluzione causa in un primo momento una riduzione delle sole frequenze alte, e solo in un secondo tempo anche le frequenze più basse vengono ridotte. L'effetto che si ottiene da questo tipo di filtraggio, quindi, è una regolarizzazione che porta ad uno smussamento di tutte le zone dell'immagine poco regolari. Finché le frequenze alte che vengono regolarizzate sono quelle dovute al rumore tutto va bene, ma quando vengono regolarizzate zone dell'immagine intrinsecamente poco regolari (come i contorni che matematicamente sono dei salti della funzione) allora quello che otterremo sarà un'immagine non ben definita con i contorni allisciati. Ovviamente, più si fa evolvere il filtro, maggiore sarà la regolarizzazione dell'immagine e quindi è di fondamentale importanza riuscire a stabilire un buon criterio di arresto, ma di questo ci occuperemo più avanti.

2.2 Discretizzazione

Analizziamo ora la discretizzazione del modello di filtraggio proposto. Sia $q + 1$ il numero di nodi in cui suddividiamo ogni lato del quadrato Ω , $h = \frac{1}{q}$ il passo spaziale e k il passo in tempo. Definiamo

$$u_{i,j}^n = u(ih, jh, nk) \quad i, j = 0, \dots, q \quad \text{e} \quad n > 0 \quad (2.4)$$

ed indichiamo con $\bar{u}_{i,j}^n$ una sua approssimazione numerica. Nella semidiscretizzazione delle variabili spaziali abbiamo utilizzato uno schema alle differenze centrate per quanto riguarda il laplaciano e schemi alle differenze all'indietro ed in avanti per le condizioni al bordo. Nella discretizzazione

della variabile temporale abbiamo utilizzato il metodo implicito di Eulero basato sulle differenze all'indietro ottenendo quindi il seguente schema:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{k}{h^2}\bar{u}_{i,j-1}^{n+1} - \frac{k}{h^2}\bar{u}_{i-1,j}^{n+1} + \bar{u}_{i,j}^{n+1} \left[1 + \frac{4k}{h^2}\right] - \frac{k}{h^2}\bar{u}_{i+1,j}^{n+1} - \frac{k}{h^2}\bar{u}_{i,j+1}^{n+1} = \bar{u}_{i,j}^n \\ \bar{u}_{i,j}^0 = (u_0)_{i,j} \\ \bar{u}_{1,j}^{n+1} = \bar{u}_{0,j}^{n+1} \\ \bar{u}_{q,j}^{n+1} = \bar{u}_{q-1,j}^{n+1} \\ \bar{u}_{i,1}^{n+1} = \bar{u}_{i,0}^{n+1} \\ \bar{u}_{i,q}^{n+1} = \bar{u}_{i,q-1}^{n+1} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

e poiché la matrice di questo sistema è simmetrica e definita positiva, abbiamo utilizzato per la sua risoluzione l'algoritmo di Gauss-Seidel che, come dimostrato in [C], sotto tali ipotesi ci garantisce la convergenza.

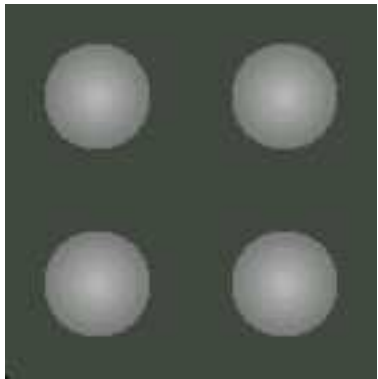
L'utilizzo di un metodo implicito comporta un aumento della complessità dell'algoritmo, ma d'altra parte assicura la sua stabilità lasciandoci liberi di scegliere il passo temporale k preoccupandoci solo della precisione numerica.

2.3 Risultati ottenuti

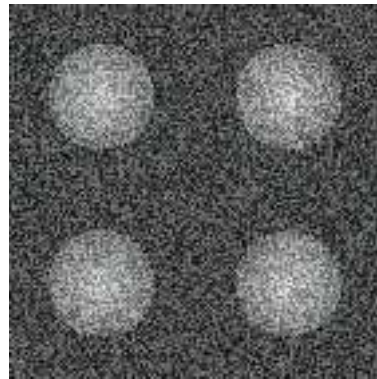
Per meglio illustrare l'evoluzione del filtraggio lineare mostriamo ora i risultati ottenuti da tale metodo su un'immagine, generata artificialmente, costituita da quattro calotte e definita sul dominio $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.

Precisiamo che le immagini utilizzate in tutti i test da noi effettuati riportano le quote in gradazioni di grigio secondo una scala da 0 a 255 dove il nero corrisponde al valore 0 ed il bianco al valore 255.

Le figure che seguono rappresentano l'immagine priva di rumore, il dato iniziale rumoroso (con Dev. Std. 0.12) ed i risultati dell'elaborazione ottenuti a tre tempi diversi ($\Delta t, 2\Delta t, 4\Delta t$) ove Δt è stato scelto empiricamente. Come è possibile osservare nelle figure che seguono, il filtro lineare causa la regolarizzazione del dato rumoroso. Le figure 2.2-2.4, infatti, mostrano una riduzione progressiva del rumore. All'aumentare del tempo di filtraggio, tuttavia, si può notare anche la diffusione dell'immagine di partenza: la Fig.2.4 evidenzia appunto come i bordi abbiano perso nitidezza. Come abbiamo già osservato nei paragrafi precedenti, questo è un fenomeno che caratterizza il nucleo di filtraggio del calore: per tempi di arresto abbastanza lunghi, il dato iniziale viene completamente diffuso.



(a)



(b)

Figura 2.1: Immagine artificiale priva di rumore (a) e rumorosa (b)



Figura 2.2: $t = \Delta t$

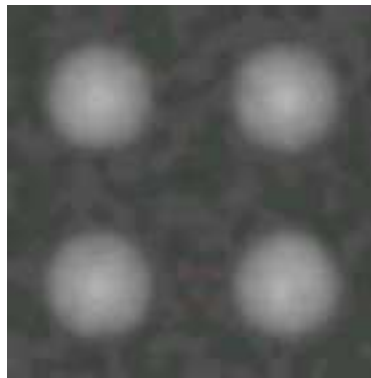


Figura 2.3: $t = 2\Delta t$

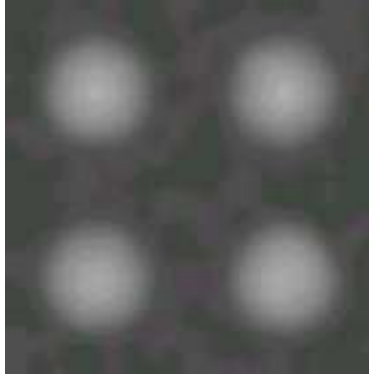


Figura 2.4: $t = 4\Delta t$

3 Filtraggio nonlineare

3.1 Presentazione del modello

Abbiamo visto che con il filtraggio lineare, contestualmente alla diminuzione del rumore, vengono perse anche alcune informazioni del dato iniziale che stiamo cercando di stimare. Presentiamo ora un modello nonlineare proposto da *Alvarez, Lions e Morel* in [ALM] come modifica del modello di *Perona-Malik* illustrato in [PM] con l'intento di migliorare tali risultati. Tale modello rappresenta un metodo selettivo di filtraggio in quanto regola la diffusione favorendola nelle zone omogenee dell'immagine e rallentandola in prossimità dei bordi. La sua formulazione è la seguente

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(|D(G_\sigma * u)|))\nabla u \\ u(0) = u_0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

ove $G_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{|x|^2}{4\sigma}}$ e g soddisfa le seguenti condizioni:

- (i) $g(0) = 1$,
 - (ii) $g(x) \geq 0$,
 - (iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$,
 - (iv) $g(x)$ è non crescente,
 - (v) $xg(x)$ è non decrescente.
- (3.2)

Ricordando che $G_\sigma * \nabla u = \nabla G_\sigma * u = D(G_\sigma * u)$, possiamo intuire il comportamento selettivo del modello: quando la norma del gradiente è alta $g(|D(G_\sigma * u)|)$ è piccola e quindi il modello diffonde più lentamente mentre quando la norma del gradiente è bassa allora $g(|D(G_\sigma * u)|)$ è circa 1 e la diffusione diviene paragonabile a quella del modello lineare.

Quindi il termine $g(|D(G_\sigma * u)|)$ non fa altro che regolare la velocità della diffusione, la quale viene dosata a seconda della distanza dai punti di contorno; per questi motivi la funzione g può essere considerata come una sorta di soglia e conferisce la non linearità al modello. Per implementare il modello abbiamo scelto come soglia

$$g(s) = \frac{1}{1 + s}. \quad (3.3)$$

3.2 Discretizzazione

Procedendo analogamente a quanto fatto per il caso lineare ed utilizzando le stesse notazioni, otteniamo la seguente discretizzazione del modello (3.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i,j}^{n+1} - \frac{\Delta t}{2h^2} [(\alpha_{i-1,j}^n + \alpha_{i,j}^n)u_{i-1,j}^{n+1} + (\alpha_{i,j-1}^n + \alpha_{i,j}^n)u_{i,j-1}^{n+1} + \\ \quad - (4\alpha_{i,j}^n + \alpha_{i-1,j}^n + \alpha_{i,j-1}^n + \alpha_{i+1,j}^n + \alpha_{i,j+1}^n)u_{i,j}^{n+1} + \\ \quad (\alpha_{i,j}^n + \alpha_{i+1,j}^n)u_{i+1,j}^{n+1} + (\alpha_{i,j}^n + \alpha_{i,j+1}^n)u_{i,j+1}^{n+1}] = u_{i,j}^n \\ u_{i,j}^0 = u_0(ih, jh), \quad 1 \leq i, j \leq q-1, \\ u_{i,0}^{n+1} = u_{i,1}^{n+1}, u_{i,q-1}^{n+1} = u_{i,q}^{n+1}, \quad 0 \leq i \leq q, \\ u_{0,j}^{n+1} = u_{1,j}^{n+1}, u_{q-1,j}^{n+1} = u_{q,j}^{n+1}, \quad 0 \leq j \leq q. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

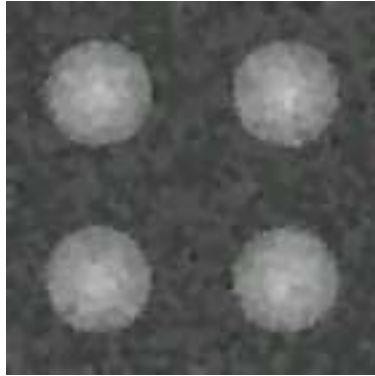
ove $\alpha_{i,j}^n$ indica una approssimazione di $g(|\nabla G * u|)(ih, jh, n\Delta t)$. Per il calcolo di $\alpha_{i,j}^n$ abbiamo approssimato la convoluzione con una combinazione convessa dei valori attorno al nodo (ih, jh) interessato.

3.3 Risultati ottenuti

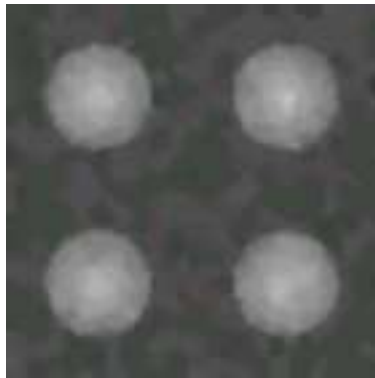
Analogamente a quanto fatto nel caso lineare, analizziamo ora i risultati del filtraggio nonlineare. L'immagine utilizzata è la stessa vista nel precedente paragrafo (Fig.2.1) in modo che i risultati siano facilmente confrontabili.

Per quanto riguarda il tempo d'arresto, anche in questo caso lo abbiamo scelto empiricamente; è bene osservare, comunque, che tale tempo di arresto è molto più grande del tempo utilizzato nel caso lineare e ciò non deve meravigliare: il modello nonlineare diffonde come l'equazione del calore solo nei punti in cui il gradiente è nullo, in tutti gli altri diffonde meno e quindi è più lento.

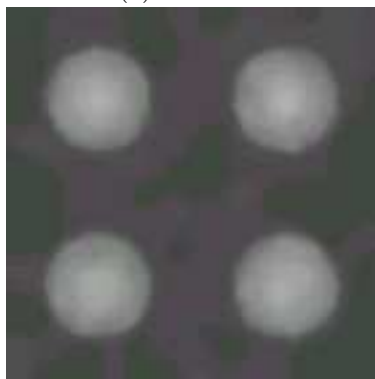
Se analizziamo i risultati del filtraggio (Fig.3.1) possiamo constatare che, come accade anche per il modello lineare, con l'aumentare del tempo di arresto il rumore viene diffuso sempre di più sebbene più lentamente; tuttavia, a differenza dell'equazione del calore, non si ha più una forte diffusione del dato iniziale che fa perdere i contorni, ma al contrario questi vengono ben conservati (Cfr. Fig.2.2-2.4).



(a) $t = \Delta t$



(b) $t = 2\Delta t$



(c) $t = 4\Delta t$

Figura 3.1: Risultato dell'evoluzione a tempi diversi del modello nonlineare nel caso dell'immagine raffigurante 4 calotte.

4 Tempo di arresto ottimo

4.1 Formulazione del criterio di arresto

Entrambi i metodi di filtraggio proposti diffondono eccessivamente per $t \rightarrow \infty$ e ciò vuol dire che, per tempi abbastanza lunghi, il filtraggio porterà alla perdita dei dettagli ed infine ad un'immagine costante. D'altra parte, se il tempo di arresto non è sufficientemente grande, il rumore non viene eliminato totalmente e quindi il risultato finale non sarà comunque accettabile. Nasce quindi la necessità di determinare un tempo di arresto t^* , che chiameremo **tempo di arresto ottimo**, per il quale si ottiene un'immagine che rappresenta un buon compromesso tra i due casi riportati ovvero un'immagine in cui il rapporto tra la quantità di dettagli conservati e il rumore ancora presente dopo il filtraggio sia massimo.

Nella Tesi abbiamo cercato di dare una formulazione del criterio di arresto abbastanza generale indipendente dal livello di rumore presente. Abbiamo trattato, inoltre, l'esistenza di un tempo di arresto ottimo, il suo comportamento qualitativo ed abbiamo definito uno schema numerico per tale problema dimostrandone la convergenza.

Maggiori informazioni a questo proposito, comunque, sono disponibili in [CF] mentre per una trattazione più generale del problema di arresto rimandiamo a [BL].

Sintetizziamo ora gli argomenti principali. Consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = A(u(x, t)), & x \in R, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (4.1)$$

con $u(t)$ e u_0 appartenenti allo spazio di Hilbert $H = L^2$ ed R un rettangolo limitato.

Assumiamo che per ogni dato iniziale u_0 il sistema (4.1) abbia un'unica soluzione globale continua e limitata $u \in C([0, +\infty); H)$.

Sia θ la variabile che indica il tempo di arresto del sistema dinamico (4.1) e siano $f, \Phi: [0, +\infty) \times H \rightarrow \mathbb{R}$, prendiamo quindi come criterio di ottimalità la minimizzazione rispetto a $\theta \in [0, +\infty)$ del seguente funzionale:

$$J(u_0, \theta) = \int_0^\theta f(s, u(s)) ds + \Phi(\theta, u(\theta)) \quad (4.2)$$

dipendente, ovviamente, dal dato iniziale u_0 .

4.2 Scelta di un criterio di arresto

Le due funzioni presenti nella (4.2), f e Φ , devono essere scelte in modo da assicurare che il filtro fornisca un buon risultato dal punto di vista dell'elaborazione dell'immagine. In particolare si vuole che

- il minimo risulti coincidente con un tempo di arresto che rappresenti un buon compromesso tra qualità dell'immagine filtrata e livello di rumore ancora presente dopo il filtraggio;
- il minimo sia all'incirca zero se l'immagine è priva di rumore ed invece strettamente positivo se l'immagine è rumorosa;
- all'aumentare del rumore presente nell'immagine, aumenti anche il tempo di arresto ottimo.

Siano quindi c , α e β tre costanti positive, allora sulla base di queste considerazioni scegliamo le funzioni f e Φ come di seguito riportato

$$f(s, u(s)) \equiv c\beta s^{\beta-1}, \quad (4.3)$$

$$\Phi(\theta, u(\theta)) = -\|u(\theta) - u_0\|^\alpha, \quad (4.4)$$

in modo che il funzionale $J(u_0, \theta)$ risulti

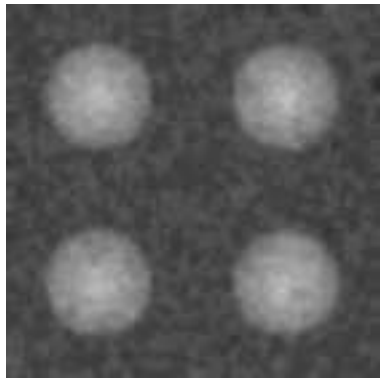
$$J(u_0, \theta) = c \theta^\beta - \|u(\theta) - u_0\|^\alpha. \quad (4.5)$$

Con questa scelta, ci assicuriamo che il minimo si allontani da zero ma non eccessivamente: il termine $c\theta^\beta$, infatti, mantiene il minimo vicino lo zero mentre il termine $\Phi(\theta, u(x, \theta))$ lo allontana e quindi incoraggia il filtraggio. Inoltre per ottenere un buon comportamento qualitativo abbiamo dimostrato che deve verificarsi

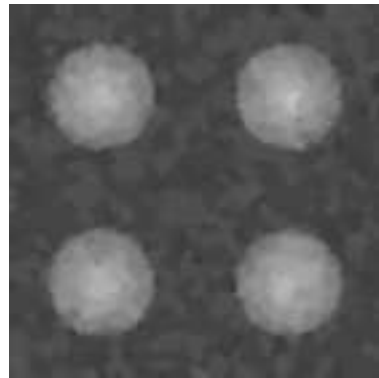
$$\alpha = 4\beta. \quad (4.6)$$

4.3 Risultati ottenuti

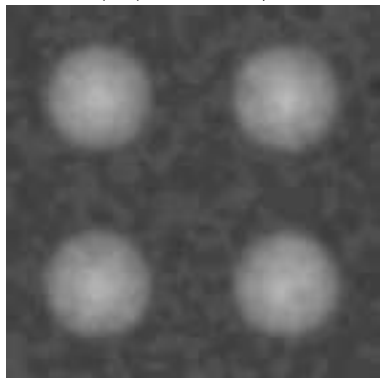
Nelle figure che seguono è possibile constatare l'efficienza di tale scelta del tempo di arresto. Sia per il caso lineare che per il modello nonlineare (Fig.4.1), si può notare come il tempo di arresto ottimo sia un buon compromesso tra la conservazione dei dettagli ed il livello di rumore ancora presente: nelle figure, infatti, abbiamo riportato anche il risultato delle rispettive elaborazioni a tempi uguali alla metà ed al doppio del tempo di arresto ottimo. Esaminando ad esempio la Fig.4.1, si può osservare che sia la (a_1) che la (b_1) risultano ancora troppo rumorose per essere considerate accettabili. D'altra parte la (a_3) e la (b_3) anche se hanno un minore livello di rumore, presentano anche una minore definizione dei dettagli. Al contrario la (a_2) e la (b_2) presentano un minor livello di rumore ed una maggiore definizione dei contorni.



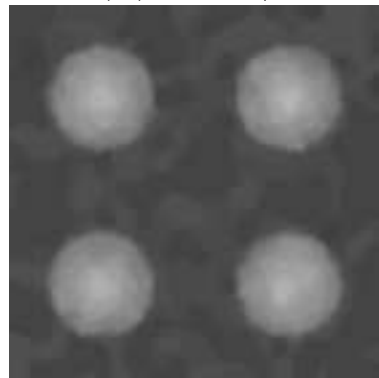
(a₁) $\Delta t = t^*/2$



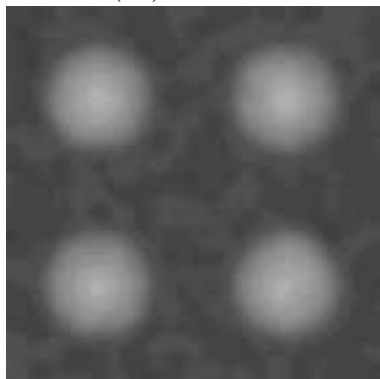
(b₁) $\Delta t = t^*/2$



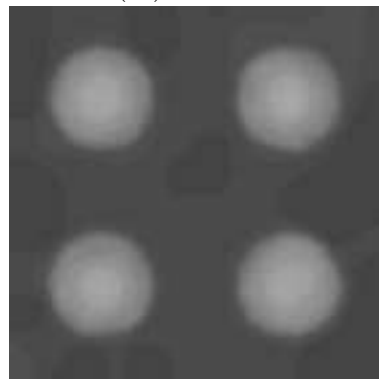
(a₂) $\Delta t = t^*$



(b₂) $\Delta t = t^*$



(a₃) $\Delta t = 2t^*$



(b₃) $\Delta t = 2t^*$

Figura 4.1: Risultato dell'evoluzione del modello lineare (a_{1-3}) e di quello nonlineare (b_{1-3}) rispettivamente ai tempi $\frac{t^*}{2}$, t^* e $2t^*$ ove t^* è il tempo di arresto ottimo.

5 Un nuovo modello

5.1 Premessa

Il modello nonlineare di *Alvarez, Lions e Morel*, sebbene sia strutturato in modo da preservare i contorni, non si comporta altrettanto bene con gli angoli che risultano invece arrotondati dopo il filtraggio. Il motivo di questo comportamento è da ricercare nel fatto che tale modello è, "più o meno", una generalizzazione dell'equazione del moto per curvatura media; siccome gli angoli sono punti in cui la curvatura media è alta, questi vengono diffusi più di quanto accade per gli spigoli che invece hanno una curvatura media più bassa.

Quello che accade, quindi, è che il modello diffonde normalmente le zone con un gradiente basso e diffonde molto meno le zone a gradiente alto; a parità di gradiente, tuttavia, i punti a curvatura maggiore, ovvero gli angoli, vengono diffusi di più degli altri.

5.2 Presentazione del modello

Per raggiungere il nostro intento di contrastare maggiormente la diffusione in prossimità dei bordi abbiamo aggiunto un termine forzante costante al modello nonlineare ottenendo quindi:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(|DG_\sigma * u|)\nabla u) + H(x) \\ u(0) = u_0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

in cui le funzioni g e G_σ sono le stesse viste per il modello nonlineare.

Prima di vedere cos'è H , riflettiamo un momento sul perché di tale scelta. Come è noto, aggiungere un termine forzante all'equazione del calore equivale ad aggiungere una sorgente interna di calore al modello fisico rappresentato da tale equazione. Nel nostro caso nonlineare, l'aggiunta del termine forzante ha lo stesso significato: H indica una sorgente di *colore*. In altre parole, quello che succede è che, nelle zone in cui $H > 0$, l'immagine filtrata tende, in generale, ad "aumentare" il livello di colore, mentre nelle zone in cui $H < 0$ tende a "diminuirlo". Costruendo, quindi, opportunamente il termine

forzante H , dovrebbe essere possibile contrastare la diffusione e conservare maggiormente i bordi.

Osservazione. Si potrebbe obiettare che tale comportamento può essere ottenuto semplicemente facendo evolvere di meno (o di più) il modello senza ricorrere ad un termine forzante. Di fatto, però, filtrare per tempi inferiori al tempo di arresto ottimo un'immagine rumorosa produce un'immagine che oltre a conservare maggiormente i contorni, conserva anche il rumore. Il termine forzante, invece, se opportunamente costruito, può opporsi alla diffusione dei contorni ed in più favorire la diffusione del rumore perché può agire localmente in modi diversi.

In base a quanto detto, il termine forzante H dovrà essere possibilmente nullo in tutti i punti in cui l'immagine priva di rumore è continua mentre deve essere diverso da zero in tutti gli altri, con valori positivi nei punti in cui si vuole aumentare il colore e valori negativi in punti in cui lo si vuole diminuire.

Fatte queste importanti considerazioni, rimane ora, comunque, il problema di come determinare H a partire da un'immagine rumorosa u_0 .

Sia θ_h il tempo di arresto ottimo per il seguente problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(|DG_\sigma * u|)\nabla u) + h \\ u(0) = u_0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

ed u_h la soluzione di (5.2) al tempo θ_h .

È bene osservare che la dimostrazione dell'esistenza di θ_h rimane ancora valida in quanto abbiamo soltanto aggiunto un termine di sorgente costante al modello.

Sia J il seguente funzionale di minimizzazione:

$$J(u_0, \theta_h, h) = \int_0^{\theta_h} f(s, u(s)) ds + \Phi(\theta_h, u(\theta_h)) + \Psi(h) \quad (5.3)$$

con $f, \Phi : [0, +\infty) \times L^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\Psi : L^2 \rightarrow \mathbb{R}$; potremmo definire il termine forzante in (5.1) come

$$H = \arg \min_h J(u_0, \theta_h, h), \quad (5.4)$$

a patto, ovviamente, che tale minimo esista. Tuttavia, come vedremo dai risultati dei test effettuati, tale scelta non porta buoni risultati. In particolare

da questi test è emerso che per ottenere un buon termine forzante è sufficiente svolgere pochi passi di un algoritmo di minimizzazione e questa sarà la nostra scelta. In quest'ottica, quindi, non è necessario nemmeno che il minimo esista poiché l'algoritmo condurrà il termine forzante verso l'estremo inferiore.

5.3 Scelta del funzionale di minimizzazione

Nella scelta del funzionale J , abbiamo, inizialmente, seguito ragionamenti analoghi a quelli fatti nella scelta di un funzionale di minimizzazione per il calcolo del tempo di arresto ottimo, arrivando alla seguente formulazione:

$$J(u_0, \theta_h, h) = c_1 \|h\|^\gamma + c_2 \theta_h^\beta \pm \|u_h - u_0\|^\alpha, \quad (5.5)$$

che differisce dalla (4.5) solo per il termine aggiuntivo $c_1 \|h\|^\gamma$, che abbiamo introdotto per limitare la crescita del termine forzante, e per il \pm davanti a $\|u_h - u_0\|^\alpha$ invece del solo segno negativo.

Per quanto riguarda la scelta delle costanti in gioco, le considerazioni fatte per il criterio di arresto ottimo non sono applicabili in questo contesto. Nei test che abbiamo effettuato, non essendo legati a vincoli particolari, abbiamo quindi scelto le potenze come segue:

$$\alpha = \gamma = 2, \quad (5.6)$$

$$\beta = 1, \quad (5.7)$$

mentre le costanti c_1 e c_2 sono state scelte empiricamente a seconda delle caratteristiche dell'immagine da filtrare e a seconda del fatto che si sia utilizzato il meno o il più nella (5.5).

La discretizzazione che abbiamo utilizzato è identica a quella proposta nel caso del modello nonlineare; inoltre come algoritmo di minimizzazione abbiamo scelto il metodo iterativo del gradiente con ricerca esatta (Cfr. [C]).

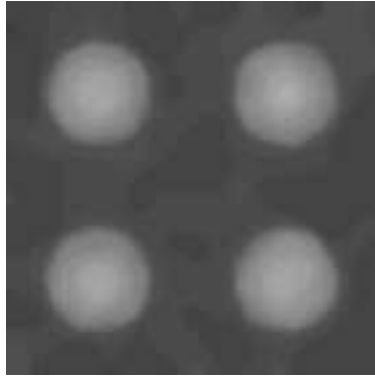
5.4 Risultati ottenuti

Analizzeremo ora il comportamento di questo modello sottolineando come la scelta del segno nella (5.5) rivesta un ruolo fondamentale. Parleremo d'ora in avanti di due modelli riferendoci al modello (5.5) dove è stato scelto una

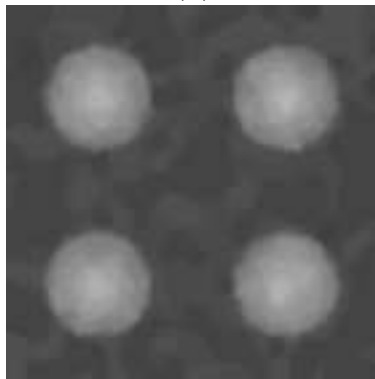
volta il meno ed un'altra il più.

In Fig.5.1 abbiamo riportato il risultato del filtraggio ottenuto da entrambi i modelli e lo abbiamo confrontato con il risultato del filtraggio nonlineare senza un termine forzante. L'immagine di partenza è anche questa volta quella in Fig.2.1. Come possiamo vedere, i due segni portano a modelli che si comportano in maniera opposta. Se scegliamo il segno meno, otteniamo una maggiore diffusione dei contorni rispetto al modello nonlineare privo di termine forzante. Scegliendo invece il segno più, i contorni risultano leggermente più definiti e le variazioni di colore presenti nella calotta rispecchiano maggiormente quelli dell'immagine di partenza non rumorosa. La seconda delle due scelte sembrerebbe quindi la migliore, purtroppo però, oltre a rilevare i contorni, tale metodo rileva, quando l'immagine è abbastanza rumorosa, anche alcune zone di rumore che preferiremmo venissero ignorate. Sebbene quindi siano necessari dei perfezionamenti, rimane comunque il fatto che tale metodo, in presenza di un basso livello di rumore, porta a risultati migliori rispetto al modello di Alvarez, Lions e Morel.

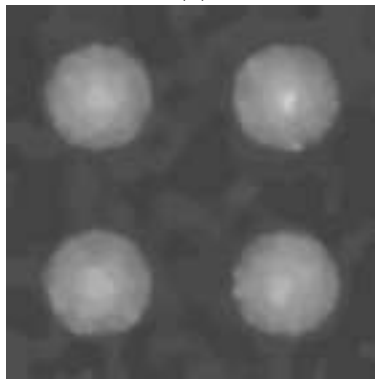
Osserviamo ora la Fig.5.2. Le immagini rappresentano il termine forzante, opportunamente riscalato, ottenuto dopo pochi passi dell'algoritmo di minimizzazione nei due casi appena discussi. Notiamo che, per poter graficare in toni di grigio il termine forzante, abbiamo dovuto riscalarlo opportunamente, ciò vuol dire che le zone che appaiono di colore nero stanno ad indicare zone in cui il termine forzante è negativo mentre quelle di colore bianco indicano zone a valori positivi. Prestiamo quindi attenzione al bordo di una qualsiasi delle quattro calotte: nell'immagine (a) possiamo notare un cerchio nero interno ed un cerchio bianco esterno mentre nella (b) accade esattamente il contrario. Questo dettaglio è fondamentale per comprendere il comportamento evolutivo della soluzione. Ricordando le considerazioni fatte in precedenza riguardo il segno del termine forzante, abbiamo quindi che le zone di colore nero corrispondono a zone in cui ci sarà una diminuzione del tono di grigio mentre le zone di colore bianco corrispondono a zone in cui ci sarà un aumento del tono di grigio. Ricordando poi che lo sfondo dell'immagine di partenza nella scala dei colori occupa un posto più basso rispetto al colore della circonferenza esterna delle calotte, si intuisce facilmente che nel primo caso (a) avremo una maggior diffusione del bordo in quanto il colore dello sfondo attorno le calotte verrà innalzato (cerchio bianco esterno) e il contorno di queste ultime verrà abbassato, mentre nel caso (b) accadrà



(a)



(b)



(c)

Figura 5.1: Risultato dell'evoluzione al tempo di arresto ottimo ottenuto utilizzando il modello (5.5) con il segno meno (a), senza termine forzante (b) e con il segno più (c).

l'esatto contrario e verranno rafforzati i contorni.

Osservazione. Il comportamento diffusivo dovuto alla scelta del segno meno nella (5.5), potrebbe comunque essere utilizzato in modelli a diffusione negativa dove si può cercare, appunto, di diminuire con la diffusione le scalettature che si vengono a creare.

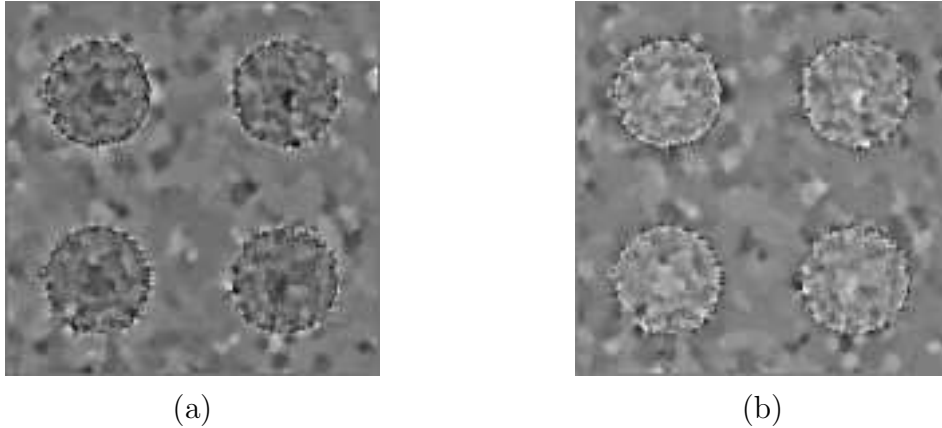


Figura 5.2: Aspetto del termine forzante dopo pochi passi di minimizzazione nel caso in cui si sia scelto il segno meno (a) nella (5.5) e nel caso sia stato scelto il segno più (b).

Nella Fig.5.2 possiamo anche notare quanto detto in precedenza sulla rilevazione del rumore: oltre a rilevare i contorni, in entrambi i casi tale metodo rileva anche parte del rumore presente. Sebbene il valore del termine forzante nei punti di contorno sia sempre più alto del valore nei punti di rumore, tale rilevazione si fa sentire nel risultato finale del filtraggio; tutto questo è dovuto all'immagine di partenza (Fig.2.1) che era sufficientemente rumorosa.

Nella Fig.5.3 possiamo osservare come il livello di rumore influisca sul buon risultato del metodo preso in esame. Se l'immagine di partenza è molto rumorosa (terza colonna) la rilevazione dei contorni dà pessimi risultati: per quanto ci si possa sforzare, il bordo della calotta nelle prime 3 immagini è difficilmente distinguibile. Se guardiamo la seconda colonna, che corrisponde ad un livello di rumore dimezzato rispetto al precedente, riusciamo a distinguere il bordo ma il termine forzante presenta molte irregolarità, derivate dal rumore, che portano ad un risultato non del tutto accettabile perché troppo rumoroso. Se infine guardiamo la prima colonna, che rappresenta un

livello di rumore ancora minore, non solo possiamo facilmente distinguere il contorno della calotta ma le irregolarità presenti sono minime ed il risultato è soddisfacente.

Osservazione. Dalla Fig.5.3 emerge anche il fatto che, con l'aumentare delle iterazioni, il termine forzante rileva sempre di più il rumore presente nell'immagine portandoci alla considerazione che nell'applicare la minimizzazione bisogna fermarsi dopo due o tre passi. Tale osservazione è sicuramente positiva perché i tempi di esecuzione di un tale algoritmo non sono piccoli e la necessità di un elevato numero di iterazioni lo avrebbe reso inutilizzabile.

Concludendo, possiamo affermare, sulla base dei numerosi test che abbiamo effettuato, che il modello da noi proposto migliora il modello di Alvarez, Lions e Morel quando si lavora su immagini poco rumorose, mentre su immagini molto rumorose i risultati sono ancora poco soddisfacenti. Per migliorare ulteriormente il modello si potrebbe pensare di utilizzare $f(H(x))$ al posto di $H(x)$ dove f andrà opportunamente costruita in modo da accentuare i contorni a discapito del rumore, ma in questa Tesi non abbiamo approfondito questo aspetto.




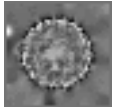


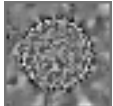
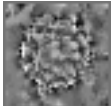




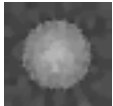
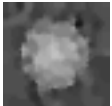

Iterazione	$r = 0.05$	$r = 0.1$	$r = 0.2$
1			
2			
3			
Dato rumoroso			
Risultato finale			

Figura 5.3: Evoluzione del termine forzante $h(x)$ in relazione al rumore presente nell'immagine di partenza. Le ultime due righe rappresentano rispettivamente il dato iniziale rumoroso ed il risultato finale.

Riferimenti bibliografici

- [ALM] L. Alvarez, P. L. Lions e J. M. Morel, *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion II*, SIAM J. Num. Anal., **29** (1992), 845-866.
- [BBDPU] G. I. Barenblatt, M. Bertsch, R. Dal Passo, V. M. Prostokishin e M. Ughi, *A mathematical model of turbulent heat and mass transfer in stably stratified shear flow*, J. Fluid Mech., **253** (1993), 341-358.
- [BD] M. Bertsch e R. Dal Passo, *Hyperbolic phenomena in a strongly degenerate parabolic equation*, Arch. Rational Mech. Anal., **117** (1992) no.4, 349-387.
- [BL] A. Bensoussan e J. L. Lions, *Impulse control and quasi-variational inequalities*, Gauthier-Villars, Parigi, 1984.
- [C] V. Comincioli, *Analisi Numerica - Metodi, modelli e applicazioni*, Mcgraw-Hill, 1995.
- [CF] I. Capuzzo Dolcetta e R. Ferretti, *Optimal stopping time formulation of adaptive image filtering*, Appl. Math. Opt., **43** (2001), 245-258.
- [CIL] M. G. Crandall, H. Ishii e P. L. Lions, *User's guide to viscosity solution of second order partial differential equation*, Bull. Amer. Math. Soc., **27** (1992), 1-67.
- [CLMC] F. Catté, P. L. Lions, J. M. Morel e T. Coll, *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion II*, SIAM J. Num. Anal., **29** (1992), 182-193.
- [CM] G. Citti e M. Manfredini, *A degenerate parabolic equation arising in image processing*, preprint.
- [F] R. Ferretti, *Dynamic programming techniques in the approximation of optimal stopping time problems in Hilbert spaces*, proceedings of the conference IFIP 7.2 "Boundary control and variations", Rabat, 1993.

- [PM] P. Perona e J. Malik, *Scale space and edge detection using anisotropic diffusion*, Proc. IEEE Comp. Soc. Workshop on Computer Vision, 1987.
- [M] D. Marr, *Vision*, Freeman, New York, 1982.
- [RT] P. A. Raviart e J. M. Thomas, *Introduction a l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, Parigi, 1983.