UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE

FACOLTÀ DI S.M.F.N.

Geometria della Congiunzione
aspetti scientifici e didattici

Sintesi della tesi di Laurea in Matematica

di Adriana Fabroni

Relatore: Prof. Rosanna Cruciani

In questa tesi viene presentata la Teoria della Congiunzione introdotta e studiata in [**?**] e ripresa in vari altri lavori. Si tratta di una teoria Matematica individuata da un'assiomatica molto semplice e intuitiva ma che presenta forti potenzialità atte a definire e studiare proprietà geometriche delle figure.

Il punto di partenza è quello di considerare l'operazione di congiungere due punti per mezzo di un segmento; questa può essere formalizzata assegnando una funzione

$$f : J \times J \to \mathcal{P}(J)$$

dove J è un insieme qualunque e $\mathcal{P}(J)$ è l'insieme delle parti di J.
Indicheremo ab il sottoinsieme di J associato alla coppia (a, b). Definiamo poi la congiunzione di due sottoinsiemi di J, A e B, come l'insieme

$$AB = \bigcup_{a \in A,\, b \in B} (ab).$$

La teoria è definita dagli assiomi seguenti

$J1$ $ab \neq \emptyset$.

$J2$ $ab = ba$.

$J3$ $(ab)c = a(bc)$

$J4$ $aa = a$.

Osserviamo che, a differenza di altre teorie geometriche, questa teoria può essere interpretata in uno spazio euclideo di dimensione qualunque.
Osserviamo anche che nell'assegnare la funzione $J \times J \to \mathcal{P}(J)$ non viene posta alcuna restrizione per le coppie di punti come avviene ad esempio in Geometria Euclidea quando si enunciano gli assiomi "due punti distinti individuano una retta" "tre punti non allineati individuano un piano" ... .

Il modello della teoria privilegiato sarà il sistema di congiunzione euclideo $(S, *)$ dove S è uno spazio euclideo qualunque e $*$ l'operazione che associa ad ogni coppia di punti distinti il segmento aperto da essi individuato e alla coppia (a, a), $a \in S$, l'insieme $\{a\}$. La scelta di un segmento aperto invece che chiuso è fondamentale allorquando verranno interpretate le varie nozioni geometriche (interno, frontiera...) nello spazio euclideo.

La nozione di *insieme convesso* viene data come al solito: un insieme A è convesso se soddisfa la condizione

$$x, y \in A \Rightarrow xy \subset A$$

Un insieme convesso può essere caratterizzato dalla condizione $A = AA$ che coinvolge soltanto la nozione di congiunzione di due insiemi.
Dalle proprietà della congiunzione si deduce che la congiunzione AB di due insiemi convessi A e B è un insieme convesso.

Comunemente l'interno di una figura geometrica viene definito dai matematici usando nozioni metriche o topologiche.

L'operazione di congiunzione ci permette di definire l'interno di un insieme convesso:

Se A è un insieme convesso un suo punto a è chiamato *punto interno* se soddisfa la condizione

$$per\ ogni\ x \in A,\ esiste\ y \in A\ tale\ che\ a \in xy$$

Interno di A è l'insieme dei punti interni di A ed è denotato $\mathcal{I}(A)$.

Nel modello euclideo è interessante confrontare questa nozione con la nozione di interno che si da comunemente utilizzando la distanza in uno spazio euclideo:

Se A è un insieme di punti di E_n (spazio euclideo a n dimensioni) e p un punto di A; diciamo *p punto di interno metrico* di A (relativo a E_n) se esiste una regione sferica aperta R di E_n con centro in p contenuta in A. *L'interno metrico* di A (relativo a E_n) è l'insieme di tutti i punti interni metrici ed è denotato $\mathcal{I}m(A : E_n)$.

Abbiamo il seguente risultato:

Se A è un convesso di uno spazio euclideo E_n, non contenuto in un E_{n-1}, allora

$$\mathcal{I}m(A : E_n) = \mathcal{I}(A).$$

Per un insieme convesso A un punto di A che non sia punto interno è chiamato *punto di frontiera* di A. La frontiera di A è l'insieme dei punti di frontiera di A ed è denotato $\mathcal{F}(A)$.

A questo punto possono provarsi varie proprietà che riguardano l'interno e la frontiera di un insieme convesso. Ne presentiamo alcune

$A \subset \mathcal{I}(K)$ *e* $B \subset K \Longrightarrow AB \subset \mathcal{I}(K)$

$A \subset B \Longrightarrow \mathcal{I}(A) \subset \mathcal{I}(B)$, se $A \cap \mathcal{I}(B) \neq \emptyset$

$A \subset B \Longrightarrow (\mathcal{I}(A) \subset \mathcal{I}(B)$ o $A \subset \mathcal{F}(B))$

$A \subset B \Longrightarrow (\mathcal{I}(A) \subset \mathcal{I}(B)$ se e solo se $A \cap \mathcal{I}(B) \neq \emptyset$ o $\mathcal{I}(A) = \emptyset)$.

Diamo la nozione di chiusura per un insieme convesso: un punto a è chiamato *punto di contatto* per un insieme convesso A se $ap \subset A$ per qualche punto p. L'insieme dei punti di contatto di A è chiamato *chiusura* di A ed è denotato $\mathcal{C}(A)$.

Comunemente, in uno spazio euclideo, un punto di contatto viene definito al modo seguente

Sia S un insieme di punti di uno spazio euclideo E_n e p un punto; diciamo *p punto di contatto metrico* di S se ogni regione sferica di E_n con centro in p contiene un punto di S. La *chiusura metrica* di S è l'insieme dei suoi punti di contatto metrico ed è denotata $\mathcal{C}m(S)$.

Come per l'interno ci chiediamo in che relazione sono nel modello euclideo le due nozioni di chiusura e di chiusura metrica. Ora troviamo semplicemente che

$$\mathcal{C}m(A) = \mathcal{C}(A).$$

Diamo per un insieme convesso A anche la nozione di bordo. Un punto si dice *punto di bordo* di A se appartiene alla chiusura di A, ma non al suo interno. Il *bordo* di A è l'insieme dei punti di bordo ed è denotato $\mathcal{B}(A)$.
In generale vale la seguente relazione $\mathcal{F}(A) \subset \mathcal{B}(A)$; otteniamo l'uguaglianza se e solo se l'insieme A contiene tutti i suoi punti di contatto.

Introduciamo due modelli della nostra teoria diversi da quello euclideo. In questi modelli vedremo che alcuni risultati "euclidei" non valgono e quindi non possono essere dedotti da $J1 - J4$.

- Nel primo, *modello Triode*, consideriamo tre semirette distinte R_1, R_2 ed R_3 aventi la stessa origine o, in uno spazio euclideo; definiamo J l'insieme $R_1 \cup R_2 \cup R_3$ e l'operazione di congiunzione al modo seguente: se i punti a e b di J appartengono alla stessa semiretta R_1, R_2 o R_3, la loro congiunzione ab è semplicemente la congiunzione euclidea di a e b. Se a e b non appartengono alla stessa semiretta, ab è l'insieme (oa) $\cup$ (ob) $\cup$ o dove oa e ob sono le congiunzioni euclidee di o con a e b rispettivamente.

Otteniamo che $(J, *)$ è un sistema di congiunzione in cui, si verifica, valgono $J1 - J4$.

Se a, b, c sono punti distinti da o, in R_1, R_2, R_3 rispettivamente allora

$$a \notin bc, \quad b \notin ac, \quad c \notin ab, \tag{0.1}$$

cioè nessuno dei tre punti appartiene alle congiunzini degli altri due. Osserviamo che

$$(ab) \cap (ac) = (ao) \cup o, \quad (bc) \cap (ba) = (bo) \cup o, \quad (ca) \cap (cb) = (co) \cup o. \tag{0.2}$$

Le relazioni in (**??**) ci dicono che se vediamo a, b e c come vertici di un triangolo, allora i lati presi a due a due hanno infiniti punti in comune. Ciò sembra strano se pensiamo alla geometria euclidea e ci induce a pensare a J come ad una retta che contenga questi tre punti.
Ma sappiamo che in geometria euclidea vale la seguente proprietà:
se tre punti sono allineati, uno deve essere tra gli altri due,
per le relazioni in (**??**) questa proprietà non è verificata.

Abbiamo anche una proprietà ben nota in geometria euclidea, che non vale nel modello Triode:
Se ab e ac hanno un punto in comune, allora $ab \subset ac$ o $ac \subset ab$;
infatti siano $a \in R_1$, $b \in R_2$ e $c \in R_3$, in tal caso ab ed ac hanno intersezione non nulla, pur non essendo $ab \subset ac$ nè $ac \subset ab$.

Si possono confrontare le varie nozioni precedentemente definite (interno, frontiera...) nel modello Triode e in quello euclideo una volta osservato che i convessi ora sono rappresentati dai punti, dagli insiemi ab con $a, b \in J$ (anche unendo uno o due estremi), da ogni insieme del tipo $a_1o \cup a_2o \cup a_3o \cup o$ con $a_i \in R_i$, $i = 1, 2, 3$ (anche unendo uno, due o tre dei punti a_i), dalle semirette R_i e da J stesso.

Il modello Triode può essere generalizzato prendendo un numero generico n di semirette; i quattro assiomi valgono comunque.

- Descriviamo ora un altro modello non euclideo della teoria. Sia J l'insieme dei punti del piano euclideo; scegliamo un sistema di coordinate cartesiane in J; se a è un punto di J, indichiamo (a_1, a_2) le coordinate di a.

Definiamo l'operazione per $a = (a_1, a_2)$ e $b = (b_1, b_2)$ come segue:
(1) Se $a_1 = b_1$ o $a_2 = b_2$, allora ab è la congiunzione euclidea di a e b
(2) Se $a_1 \neq b_1$ e $a_2 \neq b_2$, allora ab è l'insieme dei punti $x = (x_1, x_2)$ tali che x_1 è strettamente compreso fra a_1 e b_1 e x_2 fra a_2 e b_2

dunque ab rappresenta l'interno del rettangolo che ha come diagonale il segmento ab.

Otteniamo che $(J, *)$ verifica $J1 - J4$; è un modello della nostra teoria che chiamiamo *modello Cartesiano*.

L'insieme abc è il "minimo" rettangolo con i lati paralleli agli assi coordinati, contenente a, b, c.

Oltre alla proprietà detta per il modello Triode, possiamo presentare altri risultati euclidei in questo caso non verificati

Se p è un punto di ab, allora $ab = ap \cup p \cup pb$.

Se $p, q \in ab$ *e* $p \neq q$, *allora* $p \in aq$ *o* $q \in ap$

Se $ab = pq$, *allora* $a = p$ *e* $b = q$ *o* $a = q$ *e* $b = p$

Come è stato fatto nel modello Triode, abbiamo cercato anche in questo caso i convessi e interpretato le varie nozioni per essi definite (interno, frontiera...).

Ci è sembrato opportuno a questo punto anche considerare il risultato della congiunzione AA, con A insieme illimitato (retta, parabola, iperbole) e confrontarlo con quello ottenuto nel sistema di congiunzione euclideo.

Il modello Cartesiano può essere generalizzato in vari modi per modo che valgano $J1 - J4$.
1) Potremmo considerare la stessa definizione in un sistema di riferimento con assi non necessariamente ortogonali.
2) Per ogni coppia di punti a, b, pensare di dividere il segmento euclideo (ab) in n parti uguali e definire $a \cdot b = (a * x_1) \cup (x_1 * x_2) \cup \ldots \cup (x_{n-1} * b)$ dove $*$ è la congiunzione cartesiana e i punti $x_1, \ldots, x_{n-1}$ quelli individuati sul segmento ab dalla divisione in n parti.

Dato un insieme A cerchiamo la sua "convessificazione"; definiamo l' *involucro convesso* di A come l'intersezione di tutti i convessi che lo contengono e lo denotiamo $[A]$; A è detto generatore di $[A]$.
Possono provarsi varie proprietà, ad esempio:

$[A] \cup [B] \subset [A \cup B]$

$[A \cap B] \subset [A] \cap [B]$.

È interessante cercare l'involucro convesso per alcuni insiemi nel modello Triode e in quello Cartesiano.
Ad esempio nel modello Cartesiano $[\{a, b, c\}]$ rappresenta l'unione dell'interno del minimo rettangolo contenente a, b, c e dei tre punti.

Osserviamo che molti insiemi convessi in geometria euclidea, sono involucri convessi di insiemi finiti di punti. In generale definiamo *politopo* l'involucro convesso di un insieme finito, non vuoto.

Il seguente risultato ci permette di esprimere un politopo in termini di congiunzione

$$[a_1, \dots, a_n] = (a_1 \cup \dots \cup a_n) \cup (a_1 a_2 \cup \dots a_{n-1} a_n) \cup \dots \cup (a_1 \dots a_n)$$

ed è opportuno osservare che il secondo membro dell'uguaglianza non è detto che contenga termini a due a due disgiunti. Ad esempio possiamo dare la seguente caratterizzazione nel modello euclideo:

I punti a, b e c sono allineati se e solo se la formula di congiunzione per $[a, b, c]$ contiene due termini intersecanti.

Dato un politopo P, vediamo dei risultati che ci permettono di ricavare l'interno di P, $\mathcal{I}(P)$ e la chiusura di P, $\mathcal{C}(P)$, da un insieme finito generatore di P.

Per un sistema di congiunzione qualunque, si ha

$$\mathcal{I}[a_1 \dots a_n] = \mathcal{I}(a_1 \dots a_n)$$

perciò il problema di cercare $\mathcal{I}[a_1 \dots a_n]$ viene semplificato e rappresentato in termini di operazione di congiunzione.
In particolare nel sistema di congiunzione euclideo, abbiamo:

$$\mathcal{I}(a_1 \dots a_n) = a_1 \dots a_n$$

e con un esempio mostriamo che tale relazione non vale in generale e che quindi non può essere dedotta da $J1 - J4$.
Da $\mathcal{I}[a_1 \dots a_n] = \mathcal{I}(a_1 \dots a_n)$ deriva lo stesso risultato per la chiusura

$$\mathcal{C}[a_1 \dots a_n] = \mathcal{C}(a_1 \dots a_n).$$

La nozione di involucro convesso di un insieme è collegata a quella di "potenza"; dato un insieme S la congiunzione $S \dots S$ (n termini) è detta *n-esima potenza* di S. I risultati che ora mostreremo rivelano l'importanza della potenza di un insieme al fine di costruire la convessificazione di un insieme finito.Vediamo che

$$[\{a_1, \ldots, a_n\}] = \{a_1, \ldots, a_n\}^n$$

quindi otteniamo che per un insieme finito S, non vuoto, di cardinalità n, $[S] = S^n$; in particolare dalla formula di congiunzione per un politopo ricaviamo

$$\{a_1, \ldots, a_n\}^n = (a_1 \cup \ldots \cup a_n) \cup (a_1 a_2 \cup \ldots \cup a_{n-1} a_n) \cup \ldots \cup (a_1 \ldots a_n).$$

Per un insieme qualunque S l'involucro convesso è rappresentabile come l'unione di tutte le potenze di S:

$$[S] = S^1 \cup S^2 \cup \ldots \cup S^n \cup \ldots \quad .$$

La nozione di politopo ci permette di introdurre la definizione di insieme limitato nella nostra teoria, evitando così di caratterizzare tali insiemi utilizzando il concetto di distanza come si fa generalmente.

S è un insieme *limitato* se esiste un politopo che lo contiene.
Con questa definizione, mostriamo che se S e T sono limitati, la congiunzione ST è limitata.

Nella seconda parte del lavoro utilizziamo vari aspetti della teoria della congiunzione per dare spunti di attività nella scuola secondaria ai vari livelli di scolarità. Queste attività potranno essere inserite nel processo educativo riguardante l'insegnamento della geometria. Dall'esame di alcune situazioni suggerite dalla geometria della congiunzione, riguardanti il piano e lo spazio euclidei, si può pervenire alle varie proprietà delle figure.
Uno stesso problema potrà essere affrontato durante il percorso didattico dapprima in modo intuitivo e successivamente in modo più consapevole con riferimento a trattazioni geometriche rigorose.

Presentiamo le varie problematiche facendo uso del Cabri-géomètre. Si tratta di un software specificatamente messo a punto per l'insegnamento della geometria. Cabri permette di disporre di figure geometriche "vive" ossia di figure geometriche che, come i sistemi articolati, si possono trasformare conservando la "logica" che ha ispirato la loro costruzione; è chiaro che ciò costituisce un modo per meglio intuire e comprendere le proprietà delle figure geometriche e per visualizzare teoremi. Le figure si trasformano sullo schermo del calcolatore e ciò fornisce la possibilità di esplorare e scoprire il mondo della geometria. Cabri è stato concepito con l'idea di fornire ad un utente (studente, insegnante...) dei mezzi informatici per agevolare e potenziare un'attività di indagine e di riflessione nell'ambito della Geometria.

Riferimenti bibliografici

[1] Y. Baulac - F. Bellemain - J. Laborde, *Cabri-géomètre quaderno interattivo per un nuovo modo di imparare la geometria*, Loescher, 1993

[2] B. Capponi - C. Laborde, *Organizzazione della classe per l'uso di Cabri-géomètre*, Cabrirrsae, 1995 n.4

[3] G. Choquet, *L'insegnamento della Geometria*, Feltrinelli, 1968

[4] D. Hilbert, *Fondamenti della Geometria*, Zanichelli, 1970

[5] W. Prenowits - J. Jantosciak, *Join Geometries*, Springer, 1979

[6] W. Prenowits, *A contemporary approach to classical Geometry*, Am. Math. Month. 68 (No. 1, Part II), 1-67, 1961

[7] W. Prenowits - J. Jantosciak, *Geometries and join spaces*, J. Reine Angew. Math. 257, 100-128, 1972

[8] W. Prenowits - M. Jordan, *Basic Concepts of Geometry*, New York, Blaisdell, 1965