



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

di

Marina Esposito

Probabilità di non collisione per Moti Browniani

Sintesi

Relatrice

Prof.ssa Elisabetta Scoppola

Candidata

Marina Esposito

Correlatore

Dott. Alexandre Gaudillièrè

ANNO ACCADEMICO 2006-2007

Keywords: Probabilità di non collisione, moto Browniano, teoria del
potenziale

Mathematics Subject Classification: 60J45, 60J65, 82C21

Sintesi

L'argomento principale di questo lavoro è lo studio della probabilità di non collisione, fino ad un tempo T , in un sistema di n particelle sferiche di diametro 1, ciascuna delle quali percorre una traiettoria secondo il modello del moto Browniano. Fissata una configurazione di partenza per le posizioni delle particelle, esse si evolvono su \mathbb{R}^d nei pressi di un ostacolo fissato (una particella come le altre fissata nell'origine).

Per collisione intendiamo sia lo scontro tra le particelle che lo scontro tra esse e l'ostacolo fisso.

Avere il controllo sulle collisioni tra le particelle di un gas, ed in particolare sulla probabilità di non collisione fino ad un tempo T è importante se si vuole approssimare un gas rarefatto in termini di un gas perfetto. Attraverso le collisioni, infatti, si può descrivere l'interazione tra le particelle.

Senza approfondire l'aspetto fisico del problema ci concentriamo sull'aspetto tecnico e quindi cerchiamo di stimare la probabilità di non collisione trovando un estremo inferiore che decresce lentamente nel tempo.

Non ci preoccupiamo di determinare le ipotesi più generali sotto cui la nostra stima vale, limitandoci ad osservare che il nostro risultato continua a valere, per esempio, cambiando la grandezza del nostro ostacolo oppure la sua posizione.

La probabilità di non collisione è una quantità ben nota nel caso unidimensionale.

Nel 1959 Karlin e McGregor diedero in [15] una formula per calcolarla. Grabiner diede in [19] la probabilità asintotica di non collisione fino al tempo T per T grande come:

$$cost \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

dove $cost$ è una costante, che dipende dalla configurazione di partenza.

Nel 2006 A. Gaudillièrè diede in [1] il primo risultato nel caso bidimensionale. In questa tesi, seguendo le sue notazioni e il suo approccio, approfondiremo il problema affrontando anche il caso di più di due dimensioni.

L'analisi della probabilità di non collisione viene svolta studiando prima il caso nel piano \mathbb{R}^2 (Cap. 3) e successivamente ampliando la trattazione al caso \mathbb{R}^d con $d > 2$ (Cap.4). A tal fine si è usata la teoria della passeggiata aleatoria (Cap.1) e del moto browniano (Cap.2).

Per stimare la probabilità di non collisione tra due particelle stimeremo la probabilità che le particelle hanno di percorrere una distanza dell'ordine di

$T^{\varepsilon+\frac{1}{2}}$ senza collisione. Poiché le particelle impiegano tipicamente un tempo $T^{2\varepsilon+1} > T$ per percorrere tale distanza, otterremo così una stima della probabilità di non-collisione entro T . In pratica faremo questa stima con $\varepsilon = \frac{1}{2}$: altre scelte di ε (ad esempio $\varepsilon < \frac{1}{2}$) comporterebbero unicamente il cambiamento di qualche costante nella nostra stima.

Per far ciò useremo, inoltre, la teoria di base del potenziale in $(\mathbb{R}^2)^n$ prima (Cap. 3) e in $(\mathbb{R}^d)^n$ con $d > 2$ poi (Cap. 4).

Nel dettaglio la tesi è organizzata nel modo seguente.

Nel Capitolo 1 definiamo cos'è un processo stocastico e ricordiamo alcuni dei principali risultati della teoria della probabilità che saranno utilizzati nel seguito. In particolare un ruolo di fondamentale importanza nella teoria dei processi stocastici lo giocano i lemmi di Borel Cantelli, la legge 0-1 di Kolmogorov. Introduciamo la passeggiata aleatoria simmetrica sul reticolo \mathbb{Z}^d , $d = 1, 2, \dots$. Senza perdere di generalità, in questo capitolo, consideriamo la passeggiata aleatoria che parte dall'origine, cioè $x = 0$.

Ricordiamo infine, in questo capitolo, i principali risultati della passeggiata aleatoria come il Teorema di ricorrenza.

Nel Capitolo 2 analizzeremo tutti gli aspetti principali relativi al moto browniano.

Il moto browniano è un fenomeno fisico scoperto dal botanico scozzese Robert Brown(1773-1858) nel 1828: osservando al microscopio una goccia d'acqua contenente granuli di polline, notò che questi si agitavano senza sosta in maniera caotica seguendo una traiettoria estremamente irregolare (vedi figura 2). Ricordo qui soltanto le principali definizioni.

Definizione 0.1 (Processo stocastico gaussiano). Un processo stocastico $\{X_t\}_{t \in [0, +\infty)}$ su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ è detto processo stocastico gaussiano se, per ogni $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}^+$, si ha che $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ è un vettore gaussiano.

Definizione 0.2 (Moto Browniano o Processo di Wiener 1). Un processo stocastico $\{B(t) : 0 \leq t < +\infty\}$ su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con le proprietà seguenti è chiamato moto browniano o processo di Wiener. $B(t, \omega)$ è una funzione non negativa di numeri reali t e punti $\omega \in \Omega$ tali che $B(t, \cdot)$ è \mathcal{F} -misurabile per ogni t e:

- (i) $B(0, \omega) = 0$ per ogni ω ;
- (ii) $B(\cdot, \omega)$ è continua per ogni ω ;
- (iii) per $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$,

$$B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1})$$

sono indipendenti e distribuiti normalmente, con media zero e varianza $t_1, t_2 - t_1, \dots, t_n - t_{n-1}$.

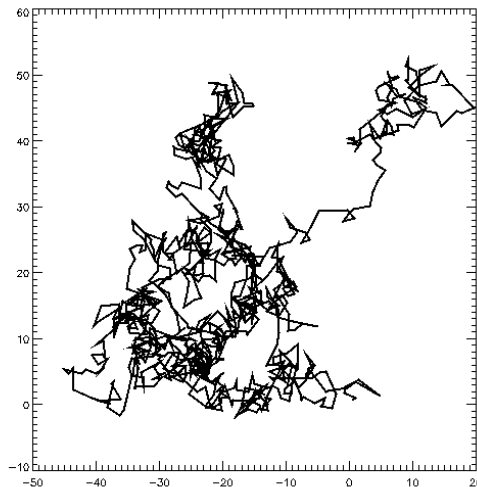


Figura 1: Esempio della traiettoria seguita da una particella in moto browniano

Il *Teorema di estensione di Kolmogorov* (vedi §1.3(ii) di [10]) ci garantisce che esiste una misura associata al moto browniano, ma per garantire l'esistenza di un moto browniano, così come è stato definito in (0.2), dovremo provare che, per ogni $\omega \in \Omega$, la funzione $B(t, \omega)$ è continua in t , e così la legge di $\{B(t) : t \geq 0\}$, denotata con μ^W , può essere introdotta sullo spazio $\mathcal{C} = \mathcal{C}[0, \infty)$ di tutte le funzioni continue su $[0, \infty]$.

In questo modo compare la *misura di Wiener* μ^W .

Un insieme cilindrico A di \mathcal{C} è un insieme della forma

$$A = \{w \in \mathcal{C} : (w(t_1), w(t_2), \dots, w(t_n)) \in B_n\} \quad (1)$$

dove $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, con $t_j \in \mathbb{R}$ per $j = 1, \dots, n$, B_n è un insieme boreliano n -dimensionale e w funzione continua su $[0, +\infty)$.

Con il variare di n otteniamo una collezione \mathcal{U} di sottoinsiemi di \mathcal{C} .

Si può vedere facilmente che \mathcal{U} è un'algebra. Se denotiamo con \mathfrak{B} la più piccola σ -algebra contenente \mathcal{U} , allora otteniamo lo spazio misurabile $(\mathcal{C}, \mathfrak{B})$ sul quale verrà definita la misura μ^W .

Quello che stiamo cercando è una funzione $\mu^W : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{C}$ tale che:

1. μ^W è numerabilmente additiva;
2. per ogni $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ e per ogni insieme boreliano n -dimensionale, abbiamo che

$$\mathbb{P}((B(t_1), B(t_2), \dots, B(t_n)) \in B_n) = \mu^W(A), \quad (2)$$

dove A è l'insieme cilindrico (1).

Teorema 0.1. *Esiste un'unica misura di probabilità su $(\mathcal{C}, \mathfrak{B})$ che soddisfa (2).*

La misura μ^W su $(\mathcal{C}, \mathfrak{B})$, la cui esistenza ed unicità è stata garantita dal Teorema 0.1, è chiamata *Misura di Wiener*.

Fornendo le ipotesi, costruiremo il modello seguendo la costruzione fatta da Lévy (1948), basata sull'approssimazione di sequenze di processi, [10].

Senza dare i dettagli della costruzione, evidenziamo la proprietà principale che è alla base dell'idea della costruzione.

Sia $B(t) = \{B(t, \omega) : t \geq 0, t \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega\}$ moto browniano su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Proposizione 0.2. *Per ogni punto t nell'intervallo finito (a, b) , $B(t)$ può essere espresso nella forma:*

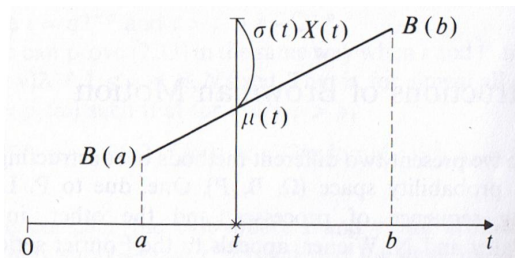
$$B(t) = \mu(t) + \sigma(t)X(t)$$

dove

$$\mu(t) = \frac{(b-t)B(a) + (t-a)B(b)}{b-a} \quad (3)$$

e $X(t)$ è una variabile aleatoria gaussiana, indipendente da $\{B(s) : s \in [0, a] \cup [b, +\infty), a, b \in \mathbb{R}\}$ e $\sigma(t)$ è dato da:

$$\sigma^2(t) = \frac{(t-a)(b-t)}{b-a}. \quad (4)$$



Il contenuto di questa proposizione può essere parafrasato come segue: dati i valori di $B(t)$, al di fuori di un intervallo (a, b) , il valore nel punto t all'interno di (a, b) è ottenuto dall'interpolazione lineare tra $B(a)$ e $B(b)$; aggiungendo a questo una quantità indipendente $\sigma(t)X(t)$, dove $\sigma(t)$ è dato da (4) e $X(t)$ è una variabile aleatoria gaussiana.

Una volta costruito il moto Browniano possiamo analizzare alcune delle proprietà più significative.

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità, $\{B_t\}_{t \geq 0}$ un moto Browniano e τ un tempo di arresto finito con probabilità uno. Allora il processo $Y_t := B_{t+\tau} - B_\tau$, $t \geq 0$ è un moto Browniano ed è indipendente dalla filtrazione F_τ ; cioè, $\sigma(Y_t : t \geq 0)$ è indipendente da \mathcal{F}_τ :

$$\mathbb{P}([(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k}) \in H] \cap M) \quad (5)$$

$$= \mathbb{P}[(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k}) \in H] \mathbb{P}(M) = \mathbb{P}[(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_k}) \in H] \mathbb{P}(M)$$

per H boreliano di \mathbb{R}^k e $M \in \mathcal{F}_\tau$.

Questa trasformazione è conosciuta con il nome di *Proprietà forte di Markov*.

Il prossimo risultato, è invece conosciuto come *Principio di riflessione*.

Sia $\{B_t\}_{t \geq 0}$ moto browniano. Allora

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} B_s \geq a \right) = 2\mathbb{P}(B_t \geq a)$$

con $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$.

Prima di passare al Capitolo 3 in cui enunciamo e dimostriamo il risultato

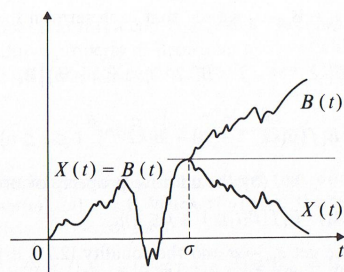


Figura 2: Riflessione del moto Browniano

più importante di questo lavoro, dimostreremo una proprietà fondamentale del moto Browniano di una singola particella che ci servirà per dimostrare il nostro risultato e che segue dal Principio di riflessione.

Lemma 0.3. Sia $\{B_t\}_{t \geq 0}$ il moto Browniano di una singola particella, $\alpha \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} B_s \geq \alpha \sqrt{t} \right) \leq e^{-\frac{\alpha^2}{2}}.$$

Nel Capitolo 3 studieremo la probabilità che n particelle sferiche di diametro 1, che si muovono nel piano \mathbb{R}^2 di moto Browniano, collidano con un ostacolo fissato nell'origine O (particella fissa \hat{O}) oppure che collidano tra di loro. Troveremo un estremo inferiore della probabilità di non collisione tra le particelle stesse e tra loro ed il singolo ostacolo, tale estremo è dato dal Teorema (0.4).

Diciamo che una collisione avviene quando una di queste particelle è tangente ad un'altra oppure quando è tangente all'ostacolo fissato nell'origine.

Denoteremo con $\mathbb{P}_{\vec{z}}$ la legge di n moti Browniani indipendenti che partono da $\vec{z} \in (\mathbb{R}^2)^n$.

Inoltre denoteremo con:

- Z_1, Z_2, \dots, Z_n ; n moti indipendenti planari Browniani;

- \underline{Z} il moto Browniano $2n$ -dimensionale

$$\underline{Z} := (Z_1, Z_2, \dots, Z_n);$$

- $\mathcal{T}_{c;\hat{O}} := \left\{ t \geq 0 : \inf_{i \neq j} d_2(Z_i(t), Z_j(t)) \wedge \inf_i d_2(Z_i(t), O) = 1 \right\}$

il tempo di prima collisione;

- $\forall \vec{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in (\mathbb{R}^2)^n$
 $\delta(\vec{z}) := \inf_{i \neq j} d_2(z_i, z_j) \wedge \inf_i d_2(z_i, O)$

la distanza tra i centri delle particelle;

- Per ogni $A \subset (\mathbb{R}^2)^n$ definiamo il tempo d'arresto:

$$\mathcal{T}(A) := \inf\{t \geq 0 : \underline{Z}(t) \in A\}.$$

Teorema 0.4. *Per ogni $n \geq 2$, $a \geq 2$ e $\varepsilon > 0$ esiste una costante $c_\varepsilon > 0$ che dipende solo da ε e tale che per ogni $T \geq \max\{a^{1+\varepsilon}, c_\varepsilon n^6\}$ e ogni $\vec{z} \in (\mathbb{R}^2)^n$ tale che $\delta(\vec{z}) \geq a$,*

$$\mathbb{P}_{\vec{z}}(\mathcal{T}_{c;\hat{O}} > T) \geq \left(\frac{\ln a}{\ln T} \right)^{c_\varepsilon n^4}.$$

Per provarlo utilizzeremo il Lemma seguente:

Lemma 0.5. *Per ogni $n \geq 2$, $a \geq 2$ e $T > 0$, se $\vec{z} \in (\mathbb{R}^2)^n$ è tale che $\delta(\vec{z}) \geq a$.*

Allora

$$\mathbb{P}_{\vec{z}}(\mathcal{T}_{c;\hat{O}} > \mathcal{T}[\partial B_2(\vec{z}, T)]) \geq \left[\left(\frac{\ln a}{\ln(a+T)} \right)^n \left(\frac{\ln a}{\ln(a+\sqrt{2}T)} \right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \right]^{\frac{1}{1-\cos \frac{\pi}{2n}}} \quad (6)$$

cosicché, in particolare $\forall \varepsilon > 0$ e $T \geq a^{(1+\varepsilon)}$

$$\mathbb{P}_{\vec{z}}(\mathcal{T}_{c;\hat{O}} > \mathcal{T}[\partial B_2(\vec{z}, T)]) \geq \left(\frac{\ln a}{\ln T} \right)^{c'_\varepsilon n^4} \quad (7)$$

dove c'_ε è una costante che dipende solo da ε .

La prova di tale Lemma [1], si basa sulla teoria del potenziale.

Possiamo provare, ora, il Teorema 0.4.

Poiché l'evento $\{\mathcal{T}_{c;\hat{O}} > T\}$ contiene l'evento $\{\mathcal{T}_{c;\hat{O}} > \mathcal{T}[\partial B(\vec{z}, T)] > T\}$ abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\vec{z}}(\mathcal{T}_{c;\hat{O}} > T) &\geq \mathbb{P}_{\vec{z}}(\mathcal{T}_{c;\hat{O}} > \mathcal{T}[\partial B(\vec{z}, T)] > T) \\ &\geq \mathbb{P}_{\vec{z}}(\mathcal{T}_{c;\hat{O}} > \mathcal{T}[\partial B(\vec{z}, T)]) - \mathbb{P}_{\vec{z}}(\mathcal{T}[\partial B(\vec{z}, T)] \leq T) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\geq \left(\frac{\ln a}{\ln T} \right)^{c'_\varepsilon n^4} - 4ne^{-\frac{T}{4n}} \quad (9)$$

e per per $T > T_0 = c_\varepsilon n^6$ per qualche costante c_ε abbiamo:

$$\left(\frac{\ln a}{\ln T}\right)^{c'_\varepsilon n^4} - 4ne^{-\frac{T}{4n}} \geq \left(\frac{\ln a}{\ln T}\right)^{c_\varepsilon n^4}$$

con c_ε costante.

La (8) è verificata perché:

$$\mathbb{P}_{\vec{z}}(\mathcal{T}_{c;\hat{o}} > \mathcal{T}[\partial B(\vec{z}, T)]) \leq \mathbb{P}_{\vec{z}}(\mathcal{T}_{c;\hat{o}} > \mathcal{T}[\partial B(\vec{z}, T)] > T) + \mathbb{P}_{\vec{z}}(\mathcal{T}[\partial B(\vec{z}, T)] \leq T).$$

La (9) deriva dal fatto che se un moto Browniano d -dimensionale è uscito dalla palla di raggio T , vediamo, considerando un cubo inscritto nella palla, che uno di $2d$ moti Browniani unidimensionali è andato oltre $\frac{T}{\sqrt{d}}$ entro T .

Così il risultato è provato.

Nel Capitolo 4 si amplia l'argomentazione del capitolo 3 passando in particolare dal problema in \mathbb{R}^2 al problema in \mathbb{R}^d con $d \geq 3$.

Il metodo che abbiamo seguito nel Capitolo 3 per stimare la probabilità di non collisione fino al tempo T , da in dimensione $d \geq 3$ un risultato più forte. Otteniamo, per il sistema che parte da \vec{z} , un estremo inferiore che dipende solo da $\delta(\vec{z})$ (definito come nel caso bidimensionale) per la probabilità di non collisione fino al tempo $T = +\infty$.

Dimostriamo seguendo la dimostrazione del teorema 0.4 il risultato in \mathbb{R}^d con $d > 2$ in assenza di ostacoli fissati nel caso delle particelle che partono da una configurazione \vec{z} tale che i centri delle particelle sono almeno distanti $a \geq 1$ e poi in presenza di un singolo ostacolo fissato all'origine.

In assenza di ostacoli fissi vedremo che il risultato avrà un esponente diverso rispetto a quello trovato nel capitolo precedente. La ragione per la quale abbiamo $\cos(\frac{\pi}{n+1})$ anziché $\cos(\frac{\pi}{2n})$ come nel lemma 0.5 che tratta il caso di particelle Browniane con un ostacolo fisso, è che in assenza di ostacoli fissi dobbiamo studiare lo spettro dell'opposto del Laplaciano discreto ($-\Delta_n$):

$$-\Delta_n := \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{2} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

invece dello spettro dell'operatore Q_n che abbiamo introdotto nella dimostrazione del lemma 0.5

$$Q_n := \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & -\frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{2} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Questo non è specifico della dimensione d , le cose vanno nello stesso modo in dimensione 2 quando non ci sono ostacoli fissi.

Teorema 0.6. 1. Per ogni $n \geq 2$, $a \geq 1$ e $T > 0$, se $\vec{z} \in (\mathbb{R}^d)^n$ con $d \geq 3$ è tale che $\delta(\vec{z}) \geq a$, allora

$$\mathbb{P}_z(\mathcal{T}_c > T) \geq \left(\frac{1 - \frac{1}{a^{d-2}}}{1 - \frac{1}{(a+\sqrt{2}T)^{d-2}}} \right)^{\frac{n(n-1)}{2(1 - \cos \frac{\pi}{n+1})}},$$

$$\text{dove } \delta(\vec{z}) := \inf_{i \neq j} d_2(z_i, z_j) \text{ e } \mathcal{T}_c := \left\{ t \geq 0 : \inf_{i \neq j} d_2(Z_i(t), Z_j(t)) \right\}$$

2. Per ogni $n \geq 2$, $a \geq 2$ e $T > 0$, se $\vec{z} \in (\mathbb{R}^d)^n$ con $d \geq 3$ è tale che $\delta(\vec{z}) \geq a$, allora

$$\mathbb{P}_z(\mathcal{T}_{c;\hat{O}} > T) \geq \left[\left(\frac{1 - \frac{1}{a^{d-2}}}{1 - \frac{1}{(a+T)^{d-2}}} \right)^n \cdot \left(\frac{1 - \frac{1}{a^{d-2}}}{1 - \frac{1}{(a+\sqrt{2}T)^{d-2}}} \right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \right]^{\frac{1}{(1 - \cos \frac{\pi}{2n})}},$$

dove $\delta(\vec{z})$ e $\mathcal{T}_{c;\hat{O}}$ definiti come nel capitolo 3.

In particolare se $T \rightarrow +\infty$ abbiamo:

1.

$$\mathbb{P}_z(\mathcal{T}_c = +\infty) \geq \left(1 - \frac{1}{a^{d-2}} \right)^{\frac{n(n-1)}{2(1 - \cos \frac{\pi}{n+1})}};$$

2.

$$\mathbb{P}_z(\mathcal{T}_{c;\hat{O}} = +\infty) \geq \left(1 - \frac{1}{a^{d-2}} \right)^{\frac{n(n-1)}{2(1 - \cos \frac{\pi}{2n})}}.$$

Con la dimostrazione di questo teorema si conclude il nostro lavoro.

Bibliografia

- [1] A. Gaudilliere, *Collision probability for random trajectories in two dimensions*, arXiv:math/0703671 Art. 2007
- [2] R. Durrett, *Probability: Theory and Examples. Second edition*. Thomson, (2000)
- [3] Pèter Major, *The proof of the central limit theorem and Fourier analysis I*, The Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences
- [4] D. Freedman, *Brownian Motion and Diffusion*. Springer-Verlag, (1983)
- [5] Pàl Rèvèsz, *Random Walk in random and non-random environments. Second edition*. World Scientific Publishing, (2005)
- [6] D. Halliday, R. Resnick, *Fisica generale 1*. CEA, (1964)
- [7] Jim Pitman, *Probability*. New York: Springer-Verlag, (1993)
- [8] B. Oskendal, *Stochastic differential equations*. Springer, (1994)
- [9] A. N. Tichonov, A. A. Samarskij, B. M. Budak, *Problemi della fisica matematica*. Mosca: Mir, (1982)
- [10] T. Hida *Brownian Motion*. Springer-Verlag, (1980)
- [11] A.N. Shiryaev *Probability*. Springer, (1996)
- [12] S. Karlin, H. M. Taylor *A first course in stochastic processes. Second edition*. Academic Press
- [13] G. R. Grimmet, D. R. Stirzaker *Probability and Random Processes*. Oxford Science Publications, (1992)
- [14] P. Billingsley *Convergence of probability measures, Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics. A Wiley-Interscience Publication*. John Wiley and Sons, Inc. New York, (1999)
- [15] S. P. Karlin, G. McGregor *Coincidence probabilities*, Pacific. J. Math. 9, 1141-1164, (1959)

- [16] Paolo Baldi *Equazioni differenziali stocastiche ed applicazioni. Seconda edizione.* Pitagora, Bologna, (2000)
- [17] I. Karatzas, S. E. Shreve *Brownian motion and stochastic Calculus.* Springer-Verlag, (1988)
- [18] Gregory F. Lawler *Intersections of Random Walks.* Boston: Birkhäuser, (1996)
- [19] D. J. Grabiner *Brownian motion in a Weyl chamber, non-colliding particles, and random matrices.* Ann. Inst. Henri Poincarè 35, 177-204, (1999)