UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Tesi di Laurea in Matematica
di

Maria Rosaria De Stefano

Fattorizzazione negli anelli commutativi unitari

Relatore

Prof.ssa Florida Girolami

Il Candidato | Il Relatore

ANNO ACCADEMICO 2000 - 2001
FEBBRAIO 2002

Classificazione AMS: 13F05, 13F15, 11Y05.
Parole chiavi: domini di Krull, anelli a fattorizzazione unica.

Maria Rosaria De Stefano è nata a Napoli il 14 Maggio del 1978;
ha conseguito il diploma di maturità scientifica presso il liceo F.Enriques (Roma) nel 1996;
si è immatricolata al Corso di Laurea in Matematica presso l'Università Roma Tre nell'A.A. 1997-1998

TESINE ORALI PRESENTATE

1. Metodo di eliminazione di Gauss (Analisi Numerica - Prof. Falcone)
2. Chiusura algebrica e campi algebricamente chiusi (Algebra - Prof.ssa Gabelli)

Sintesi

L'argomento di studio di questa tesi è la fattorizzazione nei domini d'integrità e la sua generalizzazione agli anelli commutativi unitari.
Con A indicheremo un dominio d'integrità con campo dei quozienti K e insieme degli elementi invertibili $U(A)$; con R un anello commutativo unitario avente come anello totale dei quozienti $T(R)$ e come insieme degli zero divisori $Z(R)$.

Nel corso del primo capitolo, dopo aver richiamato le nozioni di elementi associati, elementi irriducibili e elementi primi, abbiamo dato la definizione di dominio a fattorizzazione unica.

Definizione 0.0.1. *Un dominio d'integritá A è un* ***dominio a fattorizzazione unica*** *(UFD) se soddisfa le seguenti proprietá:*
(a) *per ogni elemento $a \in A \setminus U(A)$ non nullo si ha che*

$$a = p_1 \dots p_n,$$

dove p_i è un elemento irriducibile per ogni i;
(b) *la fattorizzazione di ogni elemento in fattori irriducibili è essenzialmente unica, ossia se*

$$p_1 \dots p_n = q_1 \dots q_s$$

sono due fattorizzazioni di uno stesso elemento in fattori irriducibili, allora risulta $n = s$ ed esiste $\sigma \in S_n$ tale che p_i e $q_{\sigma(i)}$ sono associati per ogni $1 \leq i \leq n$.

In particolare abbiamo provato il seguente risultato.

Proposizione 0.0.1. *Un dominio A che gode delle seguenti proprietá:*
(a) *ogni elemento irriducibile è primo;*
(b) *ogni catena ascendente di ideali principali di A del tipo:*

$$(a_1) \subseteq (a_2) \subseteq (a_3) \subseteq \dots$$

è stazionaria, cioé esiste un intero $n_0 \geq 1$ tale che $(a_n) = (a_{n+1})$ per ogni $n \geq n_0$.
La condizione (b) è chiamata la ***condizione della catena ascendente*** *sugli ideali principali.*

Abbiamo messo in risalto le relazioni esistenti tra i domini a fattorizzazione unica con i domini ad ideali principali (PID) ed i domini euclidei (ED), dimostrando che

$$ED \Rightarrow PID \Rightarrow UFD.$$

In conclusione, ricalcando passo per passo la dimostrazione fatta per provare che $\mathbb{Z}[x]$ è un UFD, abbiamo dimostrato il seguente risultato:

Teorema 0.0.1. *Sia A un dominio a fattorizzazione unica con campo dei quozienti K.*
(a) *Siano $f, g \in K[x]$ e siano f_0, g_0 i corrispettivi polinomi primitivi in $A[x]$. Se $f|g$ in $K[x]$ allora $f_0|g_0$ in $A[x]$.*
(***b***) *Sia $f \in A[x]$ un polinomio primitivo e sia g un polinomio qualsiasi di $A[x]$. Se $f|g$ in $K[x]$, allora $f|g$ in $A[x]$.*
(***c***) *Siano $f, g \in A[x]$. Se essi hanno un fattore in comune non costante in $K[x]$, allora essi hanno un fattore in comune non costante anche in $A[x]$*
(***d***) *Sia $f \in A[x]$ un polinomio non costante irriducibile, allora esso è irriducibile anche in $K[x]$;*
(***e***) *$A[x]$ è un dominio a fattorizzazione unica.*

Dal suddetto risultato viene il sgeuente corollario.

Corollario 0.0.1. *Se A è un dominio a fattorizzazione unica, allora $A[x_1, \dots, x_n]$ è un dominio a fattorizzazione unica.*

Da qui segue che $A[\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}]$ è un UFD se A lo è, perché in ogni polinomio sono coinvolte solamente un numero finito di indeterminate.

Nel secondo capitolo abbiamo presentato una caratterizzazione dei domini a fattorizzazione unica mediante i domini di Krull.
A tal fine nei primi paragrafi abbiamo studiato una parte della teoria sui domini di Krull.
Dopo aver richiamato le definizioni di valutazioni e valutazioni discrete, abbiamo introdotto il monoide dei divisori $\mathcal{D}(A)$ di un qualsiasi dominio A attraverso il quale definiremo il gruppo delle classi dei divisori.

Definizione 0.0.2. *Sia A un dominio con campo dei quozienti K. Ogni sotto A-modulo F di K tale che esiste $d \neq 0$ in A per cui $dF \subseteq A$ si dice un* ***ideale frazionario*** *di A.*

Denotato con $\mathcal{F}(A)$ l'insieme degli ideali frazionari non nulli, abbiamo definito su di esso la seguente relazione d'ordine: presi comunque $F, G \in \mathcal{F}(A)$, $F \prec G$ se e soltanto se ogni ideale frazionario principale contenente F contiene anche G. Denotata con Σ la relazione di equivalenza canonicamente associata alla relazione $'' \prec''$, abbiamo definito $\mathcal{D}(A)$ come l'insieme quoziente $\mathcal{F}(A)/\Sigma$ ed abbiamo indicato la classe di un ideale frazionario $F \in \mathcal{F}(A)$ in $\mathcal{D}(A)$ con $div(F)$.
A questo punto abbiamo definito gli ideali divisoriali:

Definizione 0.0.3. *Sia A un dominio d'integrità. Un elemento $F \in \mathcal{F}(A)$ si dice* ***divisoriale*** *se F coincide con l'intersezione di tutti gli ideali frazionari principali non nulli che lo contengono.*

Dimostrando che per $F, F', G, G' \in \mathcal{F}(A)$ tali che $F \succ F'$ e $G \succ G'$ si ha che $FG \succ F'G'$, abbiamo provato che la molteplicazione definita su $\mathcal{F}(A)$ induce su $\mathcal{D}(A)$ un'operazione associativa e commutativa esprimibile additivamente come segue: presi comunque $F, G \in \mathcal{F}(A)$

$$div(FG) = div(F) + div(G).$$

Rispetto a tale operazione $\mathcal{D}(A)$ è un monoide.
Abbiamo proseguito studiando sotto quali ipotesi $\mathcal{D}(A)$ risulta un gruppo.
A tal fine abbiamo dimostrato che $\mathcal{D}(A)$ è un gruppo se e soltanto se A è un

dominio completamente integralmente chiuso.
A questo punto abbiamo richiamato la definizione di dominio di Krull:

Definizione 0.0.4. *Un dominio d'integrità A con campo dei quozienti K si dice un **dominio di Krull** se esiste una famiglia $\{v_i\}_{i\in I}$ di valutazioni sul campo K tali che:*
(k1) *le valutazioni v_i sono discrete;*
(k2) $A = \bigcap_{i\in I} A_{v_i}$, *con* $A_{v_i} = \{x \in K | v_i(x) \geq 0\}$;
(k3) *per ogni $x \in K \setminus \{0\}$, l'insieme degli indici $i \in I$ per cui $v_i(x) \neq 0$ è finito.*

In particolare abbiamo dimostrato che A è un dominio di Krull se e soltanto se A è completamente integralmente chiuso e ogni famiglia non vuota di ideali interi divisoriali di A ammette un elemento massimale rispetto alla relazione $'' \subseteq''$; inoltre, se si indica con $\mathcal{P}(A)$ l'insieme degli elementi estremali di $\mathcal{D}(A)$, $\mathcal{P}(A)$ è una base dello $\mathbb{Z}$-modulo $\mathcal{D}(A)$ e gli elementi positivi hanno coefficienti positivi.
Abbiamo concluso la parte riguardante i domini di Krull provando che si puó identificare l'insieme $\mathcal{P}(A)$ con l'insieme degli ideali primi di altezza 1 di A e definendo il gruppo delle classi dei divisori come l'insieme quoziente $\mathcal{C}(A) = \mathcal{D}(A)/\mathcal{P}rin(A)$ dove $\mathcal{P}rin(A)$ è il sottogruppo di $\mathcal{D}(A)$ costituito da tutti i divisori principali.
Utilizzando queste proprietà dei domini di Krull abbiamo dimostrato il seguente risultato di caratterizzazione dei domini a fattorizzazione unica:

Teorema 0.0.2 (di caratterizzazione degli UFD). *Sia A un dominio d'integrità con campo dei quozienti K.*
Le seguenti condizioni sono equivalenti:
(1) *A è un dominio a fattorizzazione unica;*
(2) *ogni elemento non nullo e non invertibile $a \in A$ si può scrivere nel seguente modo:*

$$a = p_1 \dots p_n,$$

dove p_i è un elemento primo per $1 \leq i \leq n$;
(3) *ogni ideale principale proprio e non nullo di A è prodotto di ideali principali primi non nulli;*

(4) ogni elemento non nullo e non invertibile $a \in A$ si può scrivere nel seguente modo:

$$a = up_1^{e_1} \dots p_n^{e_n},$$

con $u \in U(A)$ e i p_i elementi primi tali che

$$(p_i) + (p_j) = (1)$$

per $i \neq j$;
***(5)** ogni ideale primo non nullo di A contiene un ideale principale primo non nullo;*
***(6)** A è un dominio di Krull in cui ogni ideale primo di altezza 1 è principale;*
***(7)** A è un dominio di Krull con gruppo delle classi dei divisori banale.*

Abbiamo visto subito un'applicazione di questa caratterizzazione degli UFD nel seguente risultato:

Proposizione 0.0.2. *Sia A un dominio d'integrità con campo dei quozienti K. A è un dominio ad ideali principali se e soltanto se A è un dominio a fattorizzazione unica ed ogni ideale primo non nullo di A è massimale.*

Abbiamo successivamente studiato domini atomici, ossia domini in cui esiste la fattorizzazione in elementi irriducibili, con proprietà di fattorizzazione più deboli dell'unicità. Abbiamo iniziato definendo un dominio a fattorizzazione limitata.

Definizione 0.0.5. *A è un **dominio a fattorizzazione limitata** (BFD) se è atomico e per ogni elemento non nullo e non invertibile $x \in A$ esiste un intero positivo $N(x)$ tale che se*

$$x = x_1 \dots x_n$$

con gli x_i elementi irriducibili, allora $n \leq N(x)$.

Inoltre abbiamo definito un dominio a fattorizzazione quasi unica.

Definizione 0.0.6. *A si dice un **dominio a fattorizzazione quasi unica** (HFD) se è atomico e per ogni elemento non nullo e non invertibile $x \in A$, se*

$$x = x_1 \dots x_n = y_1 \dots y_m$$

con gli x_i, y_j elementi irriducibili in A, allora $n = m$.

Per un dominio atomico A abbiamo definito la funzione **lunghezza**

$$l_A : A \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$$

dove $l_A(x) = 0$ se e soltanto se x è invertibile in A e

$$l_A(x) = sup\{n \,|x = x_1 \dots x_n \, con \, x_i \, elemento \, irriducibile\}$$

se $x \in A$ è non invertibile. Pertanto $l_A(xy) \geq l_A(x) + l_A(y)$.
Mediante la funzione lunghezza abbiamo dimostrato che A è un BFD se e soltanto se $l_A(x) < \infty$ per ogni $x \in A$ e che A è un HFD se e soltanto se $l_A(xy) = l_A(x) + l_A(y)$ per ogni $x, y \in A$.
In particolare abbiamo provato che

$$UFD \Rightarrow HFD \Rightarrow BFD \Rightarrow Atomico.$$

Nel terzo capitolo abbiamo generalizzato la teoria della fattorizzazione agli anelli commutativi unitari, ponendo particolare enfasi sulle analogie e differenze esistenti con quella vista per i domini d'integrità.
Abbiamo iniziato definendo gli elementi associati.

Definizione 0.0.7. *Sia R un anello commutativo unitario, siano a, b due elementi di R.*
*Allora a e b si dicono **associati** se $a|b$ e $b|a$, ossia $(a) = (b)$.*
*Se $a = ub$ con $u \in U(R)$ diremo che a e b sono **associati forti**.*
*In ultimo, diremo che a e b sono **associati molto forti** se verificano le seguenti proprietà:*
(1) a e b sono associati;
(2) $a = b = 0$ oppure $a \neq 0$ e $a = rb$ implica $r \in U(R)$.

Abbiamo visto come $\sim$ e $\approx$ sono relazioni di equivalenza su R compatibili con la moltiplicazione di R, mentre $\cong$ non sempre è una relazione di equivalenza ma solo su una particolare classe di anelli, detti **quasi semplificabili**, in cui $x = xy$ implica $x = 0$ oppure $y \in U(R)$, per ogni $x, y \in R$. In particolare su questi anelli le tre relazioni sono coincidenti.

Partendo da queste tre differenti nozioni di elementi associati, abbiamo dedotto tre differenti forme di irriducibilità:

Definizione 0.0.8. *Sia R un anello commutativo unitario, e sia $a \in R$ un elemento non invertibile.*
*Diremo che a è **irriducibile**, rispettivamente, **fortemente irriducibile**, **molto fortemente irriducibile**, se $a = bc$, allora b o c sono associati, rispettivamente, fortemente associati, molto fortemente associati, con a.*

Oltre a queste tre forme di irriducibilità abbiamo esaminato gli elementi irriducibili secondo Fletcher e gli elementi m-irriducibili.

Definizione 0.0.9. *Un elemento $a \in R$ non invertibile si dice irriducibile secondo Fletcher se $a = a_1 \dots a_n$ con gli a_i elementi non invertibili implica $a \sim a_i$ per qualche i.*

Definizione 0.0.10. *Un elemento $a \in R$ non invertibile si dice **m-irriducibile** se l'ideale de esso generato (a) è un elemento massimale nell'insieme degli ideali principali propri di R.*

Nel seguente risultato abbiamo dimostrato come la definizione di elemento irriducibile secondo Fletcher è equivalente a quella di elemento irriducibile precedentemente data:

Teorema 0.0.3. *Sia R un anello commutativo unitario e $a \in R$ un elemento non invertibile, le seguenti condizioni sono equivalenti:*
(1) a è irriducibile, cioé $a = bc$ implica $a \sim b$ o $a \sim c$;
(2) a è irriducibile secondo Fletcher;
(3) se $(a) = (b)(c)$, allora $(a) = (b)$ oppure $(a) = (c)$;
(4) se $(a) = (a_1) \dots (a_n)$, allora $(a) = (a_i)$ per qualche $i \in \{1, \dots, n\}$;
(5) se $a \sim bc$, allora $a \sim b$ oppure $a \sim c$;
(6) se $a \sim a_i \dots a_n$, allora $a \sim a_i$ per qualche $i \in \{1, \dots, n\}$.

Nel prossimo risultato abbiamo visto le relazioni esistenti tra gli elementi m-irriducibili con gli altri tipi di elementi irriducibili.

Teorema 0.0.4. *Sia R un anello commutativo unitario, e $a \in R$ un elemento non invertibile.*
Valgono le seguenti proprietà:
(1) a è m-irriducibile se e soltanto se $a = bc$ implica $b \in U(R)$ oppure $a \sim b$;
(2) se $a \neq 0$ è molto fortemente irriducibile, allora a è m-irriducibile;
(3) se a è m-irriducibile, allora a è fortemente irriducibile;
(4) se a è m-irriducibile e $a \sim b$, allora $a \approx b$ e b è m-irriducibile;
(5) se a irriducibile, e quindi $S = \{b \in R \,|\, (a) \subset (b)\}$ è molteplicativamente chiuso, allora $\frac{a}{1}$ è m-irriducibile in R_s.

In particolare abbiamo provato che un elemento molto fortemente irriducibile è m-irriduciible, che è fortemente irriducibile.
Da queste diverse forme di irriducibilità abbiamo dedotto differenti definizioni di atomicità:

Definizione 0.0.11. *Un anello commutativo unitario si dice **atomico**, rispettivamente, **fortemente atomico**,**molto fortemente atomico**,**m-atomico**, **p-atomico**, se ogni suo elemento non nullo e non invertibile è prodotto finito di irriducibili, rispettivemente, fortemente irriducibili, molto fortemente irriducibili, m-irriducibili, primi.*

Analogamente a quanto visto per i domini atomici, abbiamo mostrato che se R soddisfa la condizione della catena ascendente sugli ideali principali, allora R è atomico.
In particolare abbiamo caratterizzato gli anelli p-atomici mostrando che R è un anello p-atomico se e soltanto se R è prodotto diretto finito di domini a fattorizzazione unica e di speciali anelli ad ideali principali, che sono anelli ad ideali principali aventi un unico ideale primo nilpotente.
Chiaramente come per i domini d'integrità, ad ogni tipo di anello atomico corrisponde un tipo di anello a fattorizzazione unica. Abbiamo definito due fattorizzazioni di a in R

$$a = a_1 \dots a_n = b_1 \dots b_m,$$

con a_i, b_j non invertibili, isomorfe, rispettivamente, fortemente isomorfe, molto fortemente isomorfe, se $n = m$ ed esiste $\sigma \in S_n$ tale che $a_i \sim b_{\sigma(i)}$, rispettivamente, $a_i \approx b_{\sigma(i)}$, $a_i \cong b_{\sigma(i)}$.

A questo punto abbiamo dato diverse definizioni di anelli a fattorizzazioni unica.

Definizione 0.0.12. *Sia R un anello commutativo unitario.*
Sia $\alpha \in \{atomico,\ fortemente\, atomico,\ m{-}atomico,\ molto\, fortemente\, atomi{-}$

$co,\ p{-}atomico\}$ *e sia* $\beta \in \{isomorfe,\ fortemente\, isomorfe,\ molto\, fortemente$
$isomorfe\}$.
Allora R si dice un $(\alpha,\ \beta)$***-anello a fattorizzazione unica*** *se*
(1) *R è un anello del tipo α;*
(2) *ogni due fattorizzazioni di un elemento non nullo e non invertibile in elementi irriducibili del tipo usato per definire α sono β.*

Dal fatto che per ogni scelta di α, β un (α, β)-anello a fattorizzazione unica è quasi semplificabile, abbiamo provato che al variare di α e β, eccetto che per α =p-atomico, le definizione di anelli a fattorizzazione unica sono coincidenti, in quanto coincidono le definizioni di associati, associati forti, associati molto forti.
Inoltre abbiamo dimostrato che per ogni scelta di β in un $(p - atomico, \beta)$-anello a fattorizzazione unica ogni elemento irriducibile secondo Fletcher, e quindi irriducibile, è primo. Dimostrando questo fatto, abbiamo mostrato che per ogni scelta di α e β la nozione di (α, β)-anello a fattorizzazione unica è unica ed abbiamo denotato questa classe di anelli semplicemente con **anello a fattorizzazione unica** (UFR).
Utilizzando questo e la caratterizzazione degli anelli p-atomci abbiamo mostrato il seguente risultato:

Teorema 0.0.5 (di caratterizzazione degli UFR). *Sia R un anello commutativo unitario, le seguenti condizioni sono equivalenti:*
(*a*) *R è un anello a fattorizzazione unica;*
(*b*) *R è prodotto diretto finito di UFD e di speciali anelli ad ideali principali;*
(*c*) *ogni ideale principale (non nullo) è prodotto di ideali primi principali.*

In conclusione, abbiamo provato, come nel caso dei domini a fattorizzazione unica, che un anello euclideo è un anello ad ideali principali, che è a sua volta un anello a fattorizzazione unica.

Bibliografia

[1] D.D.Anderson, D.F.Anderson e M.Zafrullah *Factorization in integral domains*, J.Pure Appl. Algebra 69 (1990), 1-19

[2] D.D.Anderson, D.F.Anderson e M.Zafrullah *Factorization in integral domains II*, J.Algebra 152 (1992), 78-93

[3] D. D. Anderson e R. Markanda, *Unique factorization rings with zero divisors*, Houston J. Math. 11 (1985), 15-30.

[4] D. D. Anderson e R. Markanda, *Corrigendum:Unique factorization rings with zero divisors*, Houston J. Math. 11 (1985), 423-426.

[5] D. D. Anderson e S. Valdes-Leon, *Factorization in commutative rings with zero divisors*, Rocky Mountain J. Math 26 (1996), 439-480.

[6] M. Artin, *Algebra*, Prentice Hall, New Jersey, 1991.

[7] M. F. Atiyah MacDonald, *Introduzione all'algebra commutativa*, Feltrinelli, Milano, 1981.

[8] N. Bourbaki, *Algebra*, Springer, Berlin (1990)

[9] N. Bourbaki, *Commutative Algebra*, Herman-Addison Wesley, Paris, France, 1972.

[10] A. Bouvier, *Anneaux présimfliable et anneaux atomiques*, C. R. Acad. Paris 271 (1970), 992-994.

[11] C. R. Fletcher, *Unique factorization rings*, Proc. Camb. Phil. Soc. 65 (1969), 579-583.

[12] C. R. Fletcher, *The structure of unique factorizaztion rings*, Proc. Camb. Phil. Soc. 67 (1970), 535-540.

[13] R. M. Fossum, *The divisors class of a Krull domain*, Springer, New York, 1973.

[14] R. Gilmer, *Multiplicative Ideal Theory*, Marcel Dekker, New York, 1972.

[15] J. Huckaba, *Commutative Rings with Zero Divisors*, Marcel Dekker, New York, 1988.

[16] I. Kaplanski, *Commutative Rings*, Ed. rivisitata, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1974.

[17] I. N. Stewart e D. O. Tall, *Algebraic Number Theory*, Chapman and Hall, London, seconda edizione, 1987.

[18] A.Zaks *Half-factorial domains*, Israel J. Math. 37 (1980) 281-302

[19] O. Zariski e P. Samuel *Commutative Algebra, Vol 1*, Princeton, 1958

Ringraziamenti

I miei ringraziamenti vanno alla professoressa Florida Girolami, per avermi guidato in questi mesi di lungo lavoro e per la sua continua disponibilità a chiarirmi dubbi di ogni tipo; a mamma, papà, Roy, Angelo ed a tutti coloro che hanno creduto in me in questi anni.